Poštarina plaćena u gotovu

HRVATSKO PRIRODOSLOVNO DRUŠTVO

SOCIETAS SCIENTIARUM NATURALIUM CROATICA

GLASNIK

MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

PERIODICUM

MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

SERIJA II.

T. 2 — 1947. — No. 3

Zagreb 1947

Izdaju: Matematičko-fizička sekcija i Astronomska sekcija

SADRŽAJ

Članke, dopise i sve drugo što se odnosi na Glasnik treba upućivati Redakciji Glasnika, Zagreb, Marulićev trg 19, Tel. 40-44, 40-45 ili Upravi Prirodoslovnog društva, Ilica 16 III, Tel. 65-85. — Ček Prirodoslovnog društva: 4-704595.

Vlasništvo i naklada Društva.

Godišnja pretplata iznosi Din 120.—, a može se slati na pošt. čekovni račun broj 40-704214. — Redakcioni odbor: Dr. D. Blanuša, D. M. Katalinić, Dr. Đ. Kurepa, Dr. L. Randić, Dr. I. Supek. — Glavni i odgovorni urednik: Dr. Đuro Kurepa. — Štamparija »Rožankovski«, Zagreb, Savska c. 31.

Zlatko Janković

RASTAVLJANJE VEKTORA UBRZANJA NA KOMPONENTE

Polazeći od II. Newtonovog aksioma

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{1}$$

često moramo, pri rješavanju mehaničkih problema, rastavljati vektore $\vec{F}$ i $\vec{a}$ u komponente u izvjesnom koordinatnom sistemu. Izbor koordinatnog sistema ovisi o prirodi problema — najviše upotrebljavamo prostorne sisteme: Cartesiusov (C. s.), polarni (P. s.) i cilindrični (Z. s.). Budući da su komponente vektora brzine $\vec{v}$ i ubrzanja $\vec{a}$ u C. s. po definiciji $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, odnosno $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$, preostaje nam odrediti komponente u ostala dva sistema. U literaturi upotrebljavaju u tu svrhu obično Lagrange-ove generalizirane jednadžbe gibanja.[1]) Pokazat ćemo da dva zornija puta vode do istog rezultata: transformacija komponenata i neovisnost radnje o izboru koordinatnog sistema.

Sva tri sistema imaju osobinu da su koordinatne plohe (plohe na kojima jedna koordinata imade konstantnu vrijednost) međusobno okomite. To su tri ravnine u C. s.; kuglina ploha, čunjeva ploha i ravnina u P. s; valjkova ploha i dvije ravnine u Z. s. Zbog ortogonalnosti koordinatnih ploha i koordinatne linije (presječnice dviju koordinatnih ploha) su međusobno okomite. Elementarnim razmatranjem nalazimo komponente vektora

$$d\vec{s} \quad \text{i} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

---

[1]) L. Boltzmann: Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik, II, 1904 str. 42.
P. Appell: Traité de mécanique rationelle, I, 1919 str. 537.
C. L. Charlier: Die Mechanik des Himmels, I, 1927 str. 46.
H. Happel: Das Dreikörperproblem, 1941 str. 39.

a također, zbog navedene ortogonalnosti, i izraz za kinetičku energiju

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

	$d\vec{s}$	$\vec{v}$	T
C. s.	$dx,\ dy,\ dz$	$\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}$	$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$
P. s.	$dr,\ r \sin\vartheta\, d\varphi,\ r\, d\vartheta$	$\dot{r},\ r \sin\vartheta\, \dot{\varphi},\ r\dot{\vartheta}$	$\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2)$
Z. s.	$dR,\ R\, d\psi,\ dz$	$\dot{R},\ R\dot{\psi},\ \dot{z}$	$\frac{1}{2} m (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\psi}^2 + \dot{z}^2)$

Za daljnje razmatranje trebamo jednadžbe, koje nam izrazuju vezu između C. s. i P. s.:

$$x = r \cos\varphi \sin\vartheta \qquad y = r \sin\varphi \sin\vartheta \qquad z = r \cos\vartheta$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{r} \cos\varphi \sin\vartheta - r\dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\varphi + r\dot{\vartheta} \cos\varphi \cos\vartheta \\
\dot{y} &= \dot{r} \sin\varphi \sin\vartheta + r\dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\varphi + r\dot{\vartheta} \sin\varphi \cos\vartheta \\
\dot{z} &= \dot{r} \cos\vartheta - r\dot{\vartheta} \sin\vartheta \\
\ddot{x} &= \ddot{r} \cos\varphi \sin\vartheta - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin\varphi \sin\vartheta + 2\dot{r}\dot{\vartheta} \cos\varphi \cos\vartheta - 2r\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin\varphi \cos\vartheta \\
&\quad - r\dot{\varphi}^2 \cos\varphi \sin\vartheta - r\dot{\vartheta}^2 \cos\varphi \sin\vartheta - r\ddot{\varphi} \sin\varphi \sin\vartheta + r\ddot{\vartheta} \cos\varphi \cos\vartheta \\
\ddot{y} &= \ddot{r} \sin\varphi \sin\vartheta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos\varphi \sin\vartheta + 2\dot{r}\dot{\vartheta} \sin\varphi \cos\vartheta + 2r\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \cos\varphi \cos\vartheta \\
&\quad - r\dot{\varphi}^2 \sin\varphi \sin\vartheta - r\dot{\vartheta}^2 \sin\varphi \sin\vartheta + r\ddot{\varphi} \cos\varphi \sin\vartheta + r\ddot{\vartheta} \sin\varphi \cos\vartheta \\
\ddot{z} &= \ddot{r} \cos\vartheta - 2\dot{r}\dot{\vartheta} \sin\vartheta - r\dot{\vartheta}^2 \cos\vartheta - r\ddot{\vartheta} \sin\vartheta
\end{aligned}$$

a također između C. s. i Z. s.

$$x = R \cos\psi \qquad y = R \sin\psi \qquad z = z$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{R} \cos\psi - R\dot{\psi} \sin\psi \\
\dot{y} &= \dot{R} \sin\psi + R\dot{\psi} \cos\psi \\
\dot{z} &= \dot{z} \\
\ddot{x} &= \ddot{R} \cos\psi - 2\dot{R}\dot{\psi} \sin\psi - R\dot{\psi}^2 \cos\psi - R\ddot{\psi} \sin\psi \\
\ddot{y} &= \ddot{R} \sin\psi + 2\dot{R}\dot{\psi} \cos\psi - R\dot{\psi}^2 \sin\psi + R\ddot{\psi} \cos\psi \\
\ddot{z} &= \ddot{z}
\end{aligned}$$

a) *Transformacija komponenata*

Kao što je poznato postoji stavak: projekcija rezultante jednaka je zbroju projekcija komponenata. Primijenimo li taj stavak na neki vektor $\vec{c}\ (c_\xi, c_\eta, c_\zeta)$ i na neki smjer p, slijedi

$$c_p = c_\xi \cos(\xi, p) + c_\eta \cos(\eta, p) + c_\zeta \cos(\zeta, p) \tag{5}$$

tj. iz poznavanja komponenata c_ξ, c_η, c_ζ, c_p možemo zaključivati na kutove

$$(\xi, p),\ (\eta, p),\ (\zeta, p),$$

a iz poznavanja c_ξ, c_η, c_ζ i kutova

$$(\xi, p),\ (\eta, p),\ (\zeta, p)$$

odrediti c_p. Tu dvostruku primjenu relacije (5) izvršit ćemo i mi. Relacija (5) primijenjena na vektor $\vec{v}$ i koordinatne sisteme C. s. i P. s. daje

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_r \cos(r, x) + v_\varphi \cos(\varphi, x) + v_\vartheta \cos(\vartheta, x) \\ \dot{y} &= v_r \cos(r, y) + v_\varphi \cos(\varphi, y) + v_\vartheta \cos(\vartheta, y) \\ \dot{z} &= v_r \cos(r, z) + v_\varphi \cos(\varphi, z) + v_\vartheta \cos(\vartheta, z). \end{aligned} \tag{6}$$

Ispoređenje sistema (6) sa (3) omogućuje nam da napišemo slijedeću tablicu kosinusa za C. s. i P. s.:

	r	φ	ϑ
x	$\cos\varphi \sin\vartheta$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi \cos\vartheta$
y	$\sin\varphi \sin\vartheta$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi \cos\vartheta$
z	$\cos\vartheta$	0	$-\sin\vartheta$

(7)

Analognim postupkom dobivamo tablicu kosinusa smjera za C. s. i Z. s.

	R	ψ	z
x	$\cos\psi$	$-\sin\psi$	0
y	$\sin\psi$	$\cos\psi$	0
z	0	0	1

(8)

Prema relaciji (5) vrijediti će također

$$a_r = \ddot{x}\cos(x, r) + \ddot{y}\cos(y, r) + \ddot{z}\cos(z, r)$$

$$a_\varphi = \ddot{x}\cos(x, \varphi) + \ddot{y}\cos(y, \varphi) + \ddot{z}\cos(z, \varphi)$$

$$a_\vartheta = \ddot{x}\cos(x, \vartheta) + \ddot{y}\cos(y, \vartheta) + \ddot{z}\cos(z, \vartheta),$$

a to pomoću tablice (7) i relacija (3) daje za komponente ubrzanja u P. s.

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2 \\ a_\varphi &= 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\vartheta + 2r\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + r\ddot{\varphi}\sin\vartheta \\ a_\vartheta &= 2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta} - r\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta. \end{aligned} \tag{9}$$

Analognim postupkom pomoću tablice (8) i relacija (4) nalazimo komponente ubrzanja u Z. s.

$$\begin{aligned} a_R &= \ddot{R} - R\dot{\psi}^2 \\ a_\psi &= 2\dot{R}\dot{\psi} + R\ddot{\psi} \\ a_z &= \ddot{z}. \end{aligned} \tag{10}$$

Tablice kosinusa (7) i (8), koje smo odredili pomoću mehaničke veličine (vektora brzine $\vec{v}$), možemo odrediti i čisto geometrijskim razmatranjem.

b) *Nezavisnost radnje o izboru koor. sistema*

Druga mogućnost određivanja komponenata ubrzanja u izvjesnom koor. sistemu sastoji se u tome, da u diferencijalu radnje

$$dR = \vec{F}\,d\vec{s}$$

silu $\vec{F}$ i diferencijal puta $d\vec{s}$ izrazimo komponentama u dva različita koor. sustava i tako dobivene izraze, zbog nezavisnosti radnje o izboru koor. sistema, međusobno izjednačimo.

Za C. s. i P. s. postoji prema (2)

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = F_r\,dr + F_\varphi\,r\sin\vartheta\,d\varphi + F_\vartheta\,r\,d\vartheta,$$

odnosno dijeljenjem sa m, prema (1):

$$\ddot{x}\,dx + \ddot{y}\,dy + \ddot{z}\,dz = a_r\,dr + a_\varphi\,r\sin\vartheta\,d\varphi + a_\vartheta\,r\,d\vartheta. \tag{11}$$

Uvrstimo li u lijevu stranu jednadžbe (11) za vremenske derivacije i diferencijale koordinata izraze iz relacija (3), ispoređivanjem obih strana dobivamo za polarne komponente ubrzanja iznose (9). Analognim postupkom za Z. s. nalazimo iznose (10).

c) *Lagrange-ove generalizirane jednadžbe gibanja*

Uzmemo li kao generalizirane koordinate r, φ, ϑ, tada nam Lagrange-ove gen. jedn. gibanja (q generalizirana koordinata; T kinetička, a V potencijalna energija)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial V}{\partial q},$$

uzevši u obzir (2), glase

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{r}) - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2 &= -\frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{d}{dt}(r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}) &= -\frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta}) - r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2 &= -\frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}. \end{aligned} \tag{12}$$

Budući da za proizvoljni smjer postoji

$$F_s = -\frac{\partial V}{\partial s},$$

postoji i

$$F_r = m a_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad F_\varphi = m a_\varphi = -\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

$$F_\vartheta = m a_\vartheta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}. \tag{13}$$

Uvrstimo li (13) u (12), dobivamo

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2$$

$$a_\varphi\, r\sin\vartheta = 2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2\vartheta + 2r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}\dot{\varphi} + r^2\sin^2\vartheta\,\ddot{\varphi}$$

$$a_\vartheta\, r = 2r\dot{r}\dot{\vartheta} + r^2\ddot{\vartheta} - r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2$$

što je identično sa (9). Primjena istog postupka na Z. s. vodi opet na (10).

Na kraju spomenimo, da (9) za $\vartheta \equiv \frac{\pi}{2}$ ili (10) za $z \equiv o$ daje komponente ubrzanja u ravninskom polarnom sistemu i to

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$$

$$a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}.$$

N a p o m e n a. Tablica kosinusa (7) omogućuje izraziti vezu polarnih i pravokutnih komponenata ma kojeg vektora $\vec{A}$. Prema (5) i (7) postoji naime[2])

$$
\begin{aligned}
A_x &= A_r \cos\varphi \sin\vartheta - A_\varphi \sin\varphi + A_\vartheta \cos\varphi \cos\vartheta \\
A_y &= A_r \sin\varphi \sin\vartheta + A_\varphi \cos\varphi + A_\vartheta \sin\varphi \cos\vartheta \\
A_z &= A_r \cos\vartheta - A_\vartheta \sin\vartheta \\
A_r &= A_x \cos\varphi \sin\vartheta + A_y \sin\varphi \sin\vartheta + A_z \cos\vartheta \\
A_\varphi &= - A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi \\
A_\vartheta &= A_x \cos\varphi \cos\vartheta + A_y \sin\varphi \cos\vartheta - A_z \sin\vartheta
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Analogni postupak pomoću (5) i (8) daje vezu između cilindričnih i pravokutnih komponenata vektora $\vec{A}$.

Uzmemo li specijalno za polarni sustav

$$\vartheta \equiv \frac{\pi}{2},\ A_\vartheta = 0,$$

odnosno za cilindrični $A_z = 0$, dobivamo transformacione formule za pravokutne i polarne komponente u ravnini.

[2] Isporediti na pr. E. Madelung: Die math. Hilfsmittel d. Physikers, 1922 str. 156.

. SUMMARY

Decomposition of the Acceleration in Components

by Z. Janković

There exists a need in many mechanical problems for decomposition of the acceleration in some spatial components. For the Cartesian system (C. S.) this decomposition is given according to the definition. In the present article this decomposition is undertaken for the spatial polar system (P. S.) and for the cylindrical one (Z. S.) in three quite different manners:

a) Transformation of components uses the well-known proposition about projections (5). Its applying to the velocity $\vec{v}$ enables us to infer from (6) the cosinus table (7) resp. (8), by the help of relations (3). The same process applied to acceleration $\vec{a}$, now by the help of table (7) resp. (8), leads to the desired components in P. S. (9), resp. in Z. S. (10).

b) As the work has to be independent of mathematical framework, we put two different decompositions of $\vec{F}$ and $\vec{ds}$ in differential of work. The comparation of both sides of the relation (11), by the help of (3), gives (9) again. Analogous treatment for Z. S.

c) This is the well-known method of using the Lagrange's generalised equations (r, φ, ϑ resp. R, ψ, z are generalised coordinates).

At the end the transformation of components in P. S. and C. S. (15) is shown for whatever vector $\vec{A}$, by the help of table (7). Analogous treatment for Z. S.

The above-mentioned results are specialised also for the plain.

Josip Mokrović, Zagreb

POTRESI U VELIKIM DUBINAMA

Kad se bilo s kojeg tektonskog, eruptivnog ili ruševnog događaja gdjegod u unutarnjosti Zemlje poremeti ravnoteža, onda se od mjesta poremećenja ili hipocentra na sve strane rasprostiru dva seizmička vala. Prvi brži, kompresiono-dilatacioni ili longitudinalan primarni val P, rasprostire se brzinom

$$v_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}};$$

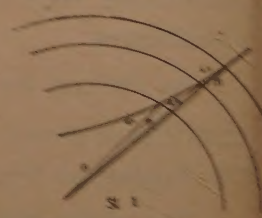
drugi polaganiji, distorzionalni ili transverzalan sekundarni val S, brzinom

$$v_S = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}},$$

gdje je ϱ gustoća materijala, a λ i μ su poznate Lamé-ove elastičke konstante.

Omjer brzina ovih dvaju seizmičkih valova S/P kreće se oko 1.8. Čim se dakle više odmičemo od žarišta potresa, tim će transverzalan val vremenski sve više zaostajati za svojim longitudinalnim parom.

Budući da brzine elastičkih valova prema unutarnjosti Zemlje dokazano rastu, to su plohe seizmičkih valova ovalne plohe jednostrano konfokalne u žarištu potresa, a njihove zrake, podvrgavajući se zakonu refrakcije, moraju biti konveksno zakrivljene prema unutarnjosti Zemlje (v. sl. 1.). Ako je dakle r radijvektor, povučen od središta Zemlje do povoljne točke, do koje je zraka dospjela u vrijeme t, a i kut upadanja, koji se od jednog do drugog koncentričnog sloja Zemlje zajedno s brzinom v neprestance mijenja, onda refrakciona formula:



Sl. 1

$$\frac{r \cdot \sin i}{v} = const = a \tag{1}$$

posve općenito predstavlja jednadžbu zrake seizmičkog vala.

[illegible]

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2, \qquad (2)$$

[illegible]

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2. \qquad (3)$$

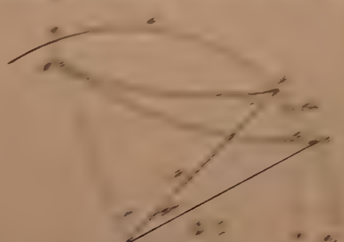
[illegible]

$$t = \int \frac{dr}{v \cos i} \qquad (4)$$

[illegible]

$$\varphi = \int \frac{tg\, i}{r}\, dr \qquad (5)$$

[illegible]



[illegible]

tenuza u promatranom pravokutnom trokutu, duž koje se je seizmički val istovremeno rasprostro kao i duž kraće katete ds, to je on duž površine Zemlje morao imati prividno veću brzinu od svoje prave prostorne brzine v_0. Ako je dakle ta »prividna brzina« rasprostiranja vala po površini Zemlje jednaka V, onda je $d\Delta = V \cdot dt$, pak izlazi, da je $\sin i_0 = \frac{v_0}{V}$. No jer je $V = \frac{d\Delta}{dt}$, to je također:

$$sin\, i_0 = v_0 \frac{dt}{d\Delta}, \tag{6}$$

odakle slijedi integracijom:

$$t = \frac{1}{v_0} \int sin\, i_0 \cdot d\Delta. \tag{7}$$

Ove dvije jednadžbe predstavljaju vrlo važan odnošaj veličina, koje možemo na površini Zemlje izravno mjeriti. Prva od njih (6) poznata je u seizmologiji pod imenom *»Benndorfov poučak«*.

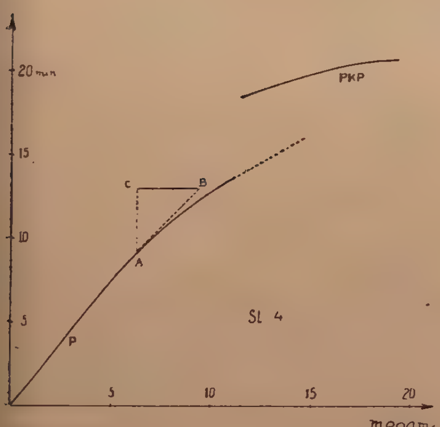
Na različitim točkama Zemljine površine porazmješteni su seizmografi. Analizom seizmograma možemo odrediti vrijeme nastupa pojedinog vala ili faze potresa za epicentralnu daljinu svake seizmografske stanice, a uz vertikalni seizmograf i kut upadanja i_0 seizmičkog vala na površinu Zemlje.

Ako na apscisnu os pravokutnog koordinatnog sustava nanesemo epicentralne daljine, a kao ordinate pripadna vremena pojavljivanja pojedinih faza potresa, onda sva ova vremena leže na krivuljama, koje se zovu »hodohrone«.

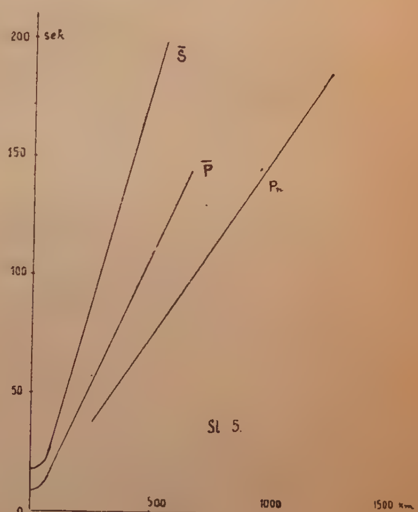
Ako u bilo kojoj točki A hodohrone (v. sl. 4.) položimo tangentu AB, a onda u toj točki konstruiramo pravokutni trokut ABC s katetama AC i BC, koje su paralelne s koordinatnim osima, tako da je kateta AC jednaka jedinici, onda tako dobivena kateta BC upravo daje traženu prividnu ili »površinsku« brzinu vala $V = \frac{d\Delta}{dt}$. Naprotiv, recipročna vrijednost ove veličine $\frac{dt}{d\Delta} = \frac{1}{V}$, koja dolazi u Benndorfovom poučku, daje nagib hodohrone u epicentralnoj daljini Δ.

Na hodohrone se je uvijek polagala velika važnost, jer su one glavni temelj pretežnog dijela seizmoloških istraživanja. Prve hodohrone pokušao je izvesti John Milne 1903., a onda H. Benndorf i R. D. Oldham 1906. god. No prve upotrebljive hodohrone izradili su E. Wiechert i K. Zoeppritz u Göttingenu 1907. iz podataka kalabrijskog i indijskog potresa 1905., te potresa u San Francisku 1906. god.

Wiechertove i Zoeppritzove hodohrone odnosile su se na direktne valove P i S i na njihove po tri refleksije na površini Zemlje te na površinsku refleksiju transformi-



Sl. 4



Sl. 5.

ranog (izmjeničnog) vala PS. Ove hodohrone počimale su već u ishodištu koordinatnog sustava, što bi značilo, da dotični valovi počinju u samom epicentru, te su se protezale do 12.000 km epicentralne daljine; sve uz pretpostavku, da se ishodište potresa nalazi na površini Zemlje.

No 8. listopada 1909. pojavio se je razoran potres u Pokuplju, južno od Zagreba. Zbog valjanosti motrenja velikog broja seizmičkih stanica do 800 km epicentralne daljine, Andrija Mohorovičić je odlučio, da i ovaj potres upotrebi za konstrukciju hodohrone, nadajući se pri tom, da će tako moći dublje zaviriti i u mehanizam rasprostiranja valova potresa.

Međutim se je već kod izvlačenja hodohrone primarnog vala P bilo pokazalo, da se ova hodohrona ne može prikazati samo jednom krivuljom, nego da postoje dvije krivulje, od kojih je jedna počimala u epicentru i išla je samo do otprilike 700 km, dok je druga niža krivulja počela tek negdje oko 300 km, pa se je istom onda nastavljala u veće epicentralne daljine (v. sl. 5.). Donju krivulju Mohorovičić je prozvao *krivuljom donjih prima* P, a gornju *krivuljom gornjih prima*, koju je označio s nadcrtanim $\overline{P}$.

Da protumači ovu, do tada još nepoznatu činjenicu, Mohorovičić je najprije tražio razjašnjenje za gornje prime, koje je mogao pratiti već od epicentra.

Pokus, da izračuna dubinu hipocentra uz pretpostavku, da se valovi P pravocrtno rasprostiru, nije mu uspio, nego je račun pokazao, da brzina ovih valova s dubinom polagano raste. Isto tako nije mu uspio ni pokušaj, da dubinu hipocentra izračuna po do tada poznatim formulama za rasprostiranje valova potresa. Stoga je pokušao s jednom pretpostavkom o porastu brzine s dubinom. Ta njegova pretpostavka u integralnom je obliku glasila:

$$v = v_h \left(\frac{r_h}{r}\right)^k, \tag{8}$$

gdje je v_h ishodišna brzina u hipocentru s radijem vektorom r_h, a v brzina rasprostiranja seizmičkog vala u unutrašnjosti Zemlje u točki (r, φ, t), određenoj radijem r i sfernom daljinom φ, do koje je zraka potresa dospjela u vrijeme t, dok je konstanta k mjera za porast brzine s dubinom, koju treba naknadno odrediti. Ova pretpostavka kasnije je ušla u seizmologiju kao »Mohorovičićev zakon«.

Uvrštavanjem ove relacije u jednadžbu zrake (1) i integracijom pomoću toga računski preudešene jednadžbe (2) Mohorovičić je pokazao, da se put zrakâ u najgornjem sloju Zemlje, a prema tomu i njihove hodohrone, posve točno dadu prikazati sa dvije posebne jednadžbe, koje daju vrijeme rasprostiranja seizmičkog vala t, te snošaj između radija vektora r i sferne daljine φ.

Pomoću ovih jednadžbi M o h o r o v i č i ć je uspio potpuno riješiti sva specijalna pitanja o rasprostiranju seizmičkih valova za male epicentralne daljine i problem određivanja dubine hipocentra u najgornjem sloju Zemlje. Trebalo je samo prije toga pokusima odrediti takove parove vrijednosti od r i k, za koje postavljene jednadžbe uvijek daju istu vrijednost v_h. Prema M o h o r o v i č i ć e v i m istraživanjima pokupskog potresa najbolji rezultat dala je žarišna brzina longitudinalnog vala P $v_h = 5.6$ km/sek za $k = 3.049$ i dubinu hipocentra od 25 km, dok je za samu površinu Zemlje brzina istog vala $v_0 = 5.53$ km/sek.

Preostalo je bilo samo pitanje, zašto gornji primarni val $\overline{P}$ uopće negdje prestaje, i zašto se donji primarni val P ne pojavljuje u samom epicentru.

Iz svojih jednadžbi M o h o r o v i č i ć je izveo, da najdublja točka, do koje dopre jedna zraka, ima radijvektor:

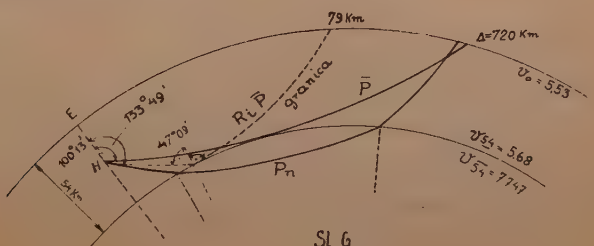
$$r_{min} = r_h \sqrt[k+1]{\sin e_h} ,$$

i da ona izbija na površini Zemlje u sfernoj daljini:

$$\varphi_{max} = \frac{e_h - 90^0}{k+1} ,$$

gdje je e_h kut impulzije, pod kojim zraka potresa izlazi iz hipocentra. Kako je kod pokupskog potresa krajnja točka hodohrone gornjeg primarnog vala $\overline{P}$ ležala u epicentralnoj daljini $\Delta = 720$ km, to je, prema prvoj jednadžbi, najniža točka zrake ovog vala mogla doseći dubinu od 54 km (u udaljenosti od $3^0 41' \cdot 6$ ili 411 km epicentralne daljine. (V. sl. 6. pretjerano shematizirano).

A zašto val gornjih prima $\overline{P}$ ne zadire u veće dubine i zašto se on u većim epicentralnim daljinama na površini Zemlje više ne pojavljuje?



Sl. 6.

Daljnjim svojim analognim istraživanjima A. Mohorovičić je pokazao, da brzina longitudinalnog vala do dubine od 54 km naraste na $v_{54} = 5{\cdot}68$, a onda u toj dubini naglo skoči na $v_{\overline{54}} = 7{\cdot}747$ km/sek. To znači, da se u toj dubini od 54 km naglo mijenja materijal, iz kojeg se sastoji unutarnjost Zemlje, i da prema tomu u toj dubini mora ležati granična ploha najgornjeg sloja Zemljine kore.

Zbog te Mohorovičićeve konstatacije ovaj se sloj Zemljine kore u kasnijoj seizmološkoj literaturi navodi kao *»Mohorovičićev sloj«*.

Kako se dakle prema tomu događaji dalje odvijaju?

Sve zrake longitudinalnog vala P (v. sl. 6.), koje iz 25 km dubokog hipocentra izlaze pod kutovima od 0^0 do 100^0 13', dolaze na površinu Zemlje izravnim putem, i ova zadnja zraka svojom najnižom točkom dodiruje donju granicu Zemljine kore. Doduše i one zrake, koje iz hipocentra izlaze pod kutovima između 100^0 13' i 133^0 49', još uvijek ostaju u gornjem sloju, ali se na njegovoj donjoj granici totalno reflektiraju. Granična zraka između posljednje zrake $R_i\overline{P}$ (reflexio inferior $\overline{P}$), koja se totalno reflektira, i prve zrake P_n, koja prodre u donji sloj, upada na plohu diskontinuiteta pod kutom ($\sin i_{\overline{54}} = 1/n = 0{\cdot}72957$) od 47^0 09', da lomeći se pod kutom od 90^0 izbije na površinu Zemlje u epicentralnoj daljini od 79 km. Sve pak zrake P_n, koje iz hipocentra izlaze pod kutom impulzije većim od 133^0 49', radi velike razlike brzina (indeks loma $n = 7{\cdot}747/5{\cdot}68 = 1{\cdot}3638$) pod razmjerno se velikim kutom lome u donji sloj Zemljinog ovoja, da onda, kad ponovno upadnu na donju granicu Zemljine kore, obrnutim lomom tek u nekoj epicentralnoj daljini izbiju na površinu Zemlje.

Prema tomu su dakle gornje prime $\overline{P}$ i donje prime P_n seizmičkog vala isti longitudinalni val, koji se razlikuje samo po tom, što različitim putovima izbija na površinu Zemlje. Kako su prema tomu gornje prime $\overline{P}$ isključivo obilježje najgornjeg sloja Zemljine kore, koje potpuno označuju njegov individualitet i u daljnjem se toku događaja više ne pojavljuju, to ih je Mohorovičić nazvao i individualnim primama $\overline{P}$. Naprotiv je donje prime P, koje se u većim epicentralnim daljinama normalno rasprostiru, prozvao i normalnim primama P_n.

Analogna istraživanja Mohorovičić je proveo i za transverzalne valove S, s tim, da je njihova brzina u hipocentru od 25 km dubine jednaka 3·27 km/sek, brzina emergencije na gornjoj granici sloja $v_{o(s)} = 3·23$, a na njegovoj donjoj granici 3·32, dok ona ispod ove granice naglo poraste na 4·182 km/sek. Iz vremena pak rasprostiranja individualnih prima $\overline{P}$ i individualnih sekunda $\overline{S}$ on je našao, da njihov omjer poprečno iznosi 1·71. No gotovo jednako toliki omjer on je našao i između vremena nastupanja, odnosno brzina rasprostiranja, maksimalnih valova M prema normalnim sekundama S_n. Osim toga je našao, da je i prava brzina maksimalnih površinskih valova bila upravo jednaka prividnoj brzini transverzalnih valova 3·33 km/sek, i da prema tomu obje vrsti vala moraju zajedno padati. Radi toga je Mohorovičić držao vjerojatnim, da su maksimalni valovi oni valovi, koje na površini Zemlje induciraju individualne sekunde $\overline{S}$. Prema tomu on je onda stvorio i slijedeći zaključak:

»*Da je ognjište potresa u donjem sloju Zemlje, onda ne bi potres imao ni $\overline{P}$, ali ni $\overline{S}$, bio bi dakle potres bez maksimalne faze*«; a onda nadodaje: »*Ne znam, da li se je ikada takav potres opazio*«, i prema tomu završava: »*Prethodno moram pretpostaviti, da u donjem sloju zemlje nema seizmičke djelatnosti*«.

Prema tomu seizmička djelatnost odvijala bi se samo u nehomogenom stijenju kristaliničnog temeljnog gorja Zemljine kore. Geografija potresnih žarišta pokazala je, da su ovi potresi u vezi s tektonskim sastavom Zemlje, te da su i po jakosti i po čestini uglavnom vezani na mediteranski i cirkumpacifički pojas. Samo 3% od ovih potresa jesu slabi ruševni, 7% ih je eruptivnih, dok su najčešći tektonski potresi sa 90%, od kojih su najjači i najobičniji dislokacijski sa 85%, zatim 4% nabornih potresa, koji dolaze od nabiranja stjenovitih slojeva i 1% lomnih potresa, koji dolaze od lomljenja stijena.

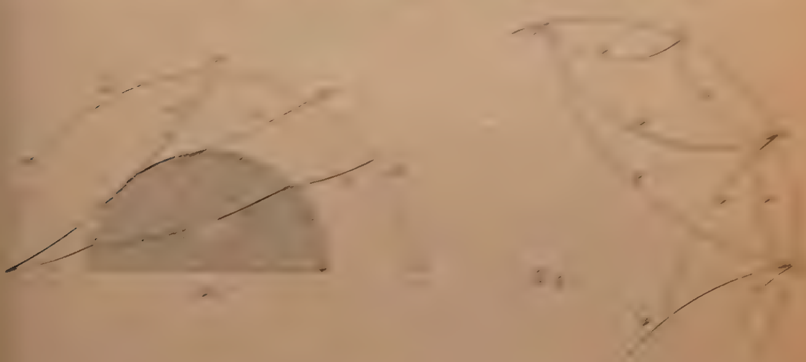
No 1912. god. objavljena je u Göttingenu jedna Zoeppritzova radnja, u kojoj se je on bavio omjerima amplituda $p(\Delta)$ prethodnih valova potresa u vezi s jednom novom metodom za utvrđivanje puta seizmičkih zraka u unutarnjosti Zemlje. U toj radnji Zoeppritz je izričito upozorio na dva

različita tipa potresa. Potresi prvog tipa imaju jedan jedini jak početak. Kod ovakovih potresa sve faze prethodnih valova oštro nastupaju, a t. zv. glavni valovi kod njih su začudno maleni. Zoeppritz je tumačio, da se jak početak prethodnih valova može samo onda očekivati, ako je brzina v u izrazu za kinetičku energiju osobito velika. Naprotiv je naslućivao, da se dugoperiodični glavni valovi samo onda pobuđuju, ako u izrazu $\frac{1}{2} \cdot mv^2$ masa m ima veliku vrijednost, to jest, kad kod kidanja i pomicanja Zemljinih slojeva, koja izazivlju potrese, sudjeluju osobito velike mase. Prema tomu dakle ima potresa bez maksimalne faze.

Iz Benndorfovog poučka jasno se razabira, da se diferenciranjem hodohrone t (Δ) (v. jedn. 6.) dobiva kut upadanja seizmičkog vala na površinu Zemlje, i da se obrnuto integriranjem sin i_0 (Δ) — funkcije (jedn. 7.) može dobiti hodohrona.

Usklađujući tako empiričku hodohronu t (Δ) i empiričku sin i_0 (Δ) — odnosno i_0 (Δ)—funkciju po Benndorfovom poučku s Zoeppritzovom p (Δ)—funkcijom amplituda, göttingenška je seizmološka škola, napose L. Geiger i B. Gutenberg, 1912. god. dokazala, da brzina longitudinalnog seizmičkog vala od 7 7 km/sek pod donjom granicom Mohorovićevog sloja do dubine od 2900 km naraste na oko 13 km/sek. Neposredno pak ispod ove granice ova brzina naglo spadne na 8 km/sek, da onda do središta Zemlje u 6370 km postepeno opet naraste na 11 km/sek. Na taj je način konačno bilo dokazano, da Zemlja ima jezgru s promjerom od preko 6900 km.

Prema tomu će granična zraka primarnog vala potresa, koja svojom najdubljom točkom dodirne jezgru Zemlje s izvanjske strane (v. sl. 7.), izbiti na površinu Zemlje u epicentralnoj daljini od neko 12.000 km. U većim daljinama ovaj će val samo difrakcijom na jezgri sa znatnim vremenskim zakašnjenjem možda gdjegod zalutati na površinu Zemlje. No prva zraka ovog vala, koja prodre u jezgru Zemlje, zbog naglog pada brzine prelomit će se k središtu Zemlje, a onda, udarivši ponovno na granicu jezgre s nutarnje strane, obrnutim lomom jako kasno izbiti na površinu tek u daljini od neko 16.000 km (usp. sl. 4.).



Iz hodohrona primarnog vala P prve vrsti potresa jasno se razabira, da je prividna brzina ovog vala po površini Zemlje (po Benndorfovom poučku $i_0 \sim 90^0$, $\sin i_0 \sim 1$, $V \sim v_0$) približno jednaka prostornoj brzini rasprostiranja longitudinalnog vala. Kreće se dakle od neko $5\frac{1}{2}$ km/sek blizu epicentra do kojih 8 km/sek u daljinama od nešto preko 100 do oko 1000 km epicentralne daljine. Osim toga sekundarni valovi S kod ovih potresa u samom epicentru odmah ili vrlo brzo nastupaju iza primarnih valova P, a u sve većim daljinama sa sve brže rastućom vremenskom razlikom. Maksimalna faza kod ovih je potresa uvijek dobro razvijena.

Kod druge vrsti potresa prividna brzina P valova po površini Zemlje već je blizu epicentra vrlo velika. U prvih 200 km oko epicentra ona iznosi preko 20 km/sek. To je pak samo tako moguće, da sve ove točke Zemljine površine leže skoro jednako daleko od hipocentra na gotovo istoj valnoj plohi male zakrivljenosti odnosno velikog polumjera, t. j. da žarište potresa leži odgovarajuće duboko. Vremenska pak razlika između nastupanja S i P valova kod ovih je potresa već u samom epicentru prilično velika: u pojedinim slučajevima do 40 sek ili čak i preko jedne minute. No baš je to opet samo tako moguće, da su se ova dva vala rasprostirala na dovoljno dalekom putu, t. j. iz odgovarajuće dubokog hipocentra.

Prema tomu je egzistencija dubokofokalnih potresa konačno bila dokazana.

Kako se pojavljuju ovakovi potresi?

Makroseizmički oni su u epicentralnom području slabo zamjetljivi, a njihov intenzitet na velikom području malo opada. U malim epicentralnim daljinama oni nemaju ni individualnih prima $\overline{P}$ ni individualnih sekunda $\overline{S}$, kao ni maksimalne faze M. Posve onako, kako je Andrija Mohorovičić već 1910. bio predviđao!

Naprotiv su prethodni valovi ovih potresa dobro razvijeni, a broj njihovih faza u najmanju ruku podvostručen. Zašto?

Svaka zraka direktnog normalnog vala P_n (v. sl. 8.), koja kod plitkog potresa, izlazeći iz hipocentra, izbije na površinu Zemlje u određenoj epicentralnoj daljini, u dvostrukoj se epicentralnoj daljini pojavljuje kao jedamput reflektirani val PP, u trostrukoj daljini kao dvaput reflektirani val PPP i t. d. Ako

se međutim žarište potresa nalazi u većoj dubini, onda se u svakoj točki na površini Zemlje pojavljuju po dvije jednakovrsne i istovrsne refleksije. Na primjer,

Svaka zraka direktnog vala p (sl. 3), koja izbija iz hipocentra pod kutom < 90°, reflektirat će se na površini Zemlje u distanciji E bliže epicentru i onda u odgovarajućoj distanciji seizmografske stanice Δ izbit na površinu Zemlje kao jedamput reflektirani val pP. No na istu stanicu izbit će i jedamput reflektirani val PP, koji iz hipocentra izbija pod odgovarajućim kutom > 90° i prema tome se reflektira na površini Zemlje u odgovarajućoj daljini E bliže stanici. Što je dubina žarišta veća, to se ove dvije refleksione točke sve više

razilaze, a vremenski interval reflektiranih faza na diagramu iste seizmografske stanice postaje veći.

Imamo li sada hodokronu direktnog longitudinalnog vala P za poznatu dubinu a, recimo 25 km, onda će (v. jedn. 4. i 5.) vrijeme rasprostiranja toga vala za svaku proizvoljnu dubinu hipocentra h u kojojgod epicentralnoj daljini:

$$\Delta_{h(P)} = \Delta_{a(P)} - \int_h^a \frac{tg\, i}{r}\, dr$$

biti jednako:

$$t_{h(P)} = t_{a(P)} - \int_h^a \frac{dr}{v \cdot \cos i},$$

a kao kontrola služi još veličina $\frac{1}{v^2}$ prema jednadžbi (3).

S druge strane će vrijeme rasprostiranja, u blizini epicentra jedamput reflektiranog vala pP, u kojojgod epicentralnoj daljini:

$$\Delta_{h(pP)} = \Delta_{a(P)} + \int_h^a \frac{tg\, i}{r}\, dr + \int_h^a \frac{tg\, i}{r}\, dr$$

doseći vrijednost:

$$t_{h(pP)} = t_{a(P)} - \int_h^a \frac{dr}{v \cdot \cos i} + \int_h^a \frac{dr}{v \cdot \cos i}.$$

Posve je isti postupak za računanje hodohrona S i sS, dok je analogan postupak za računanje hodohrona izmjeničnih, jedamput reflektiranih valova sP i pS nešto zamršeniji, jer treba uzeti u račun i njihove prividne brzine po površini Zemlje.

Prve empiričke hodohrone za duboka potresna žarišta dali su odjelito jedan od drugoga 1932. F. J. Scrase i V. C. Stechschulte za po jedan izrazito duboki potres. Prve pak praktički upotrebive računske hodohrone odredili su japanski seizmolozi K. Wadati i K. Masuda 1933., dok ih je G. J. Brunner 1935. god. grafički konstruirao za glavne valove potresa. B. Gutenberg i C. F. Richter iz Pasadene izračunali su 1936. hodohrone za različite faze potresa do 800 km fokalne dubine, a za dubine od 400 i 800 km oni su ih i grafički prikazali. Do 1942. Harold Jeffreys je objavio još nekoliko radova o hodohronama duboko-fokalnih potresa, a Markus Båth je 1943. razradio i jednu specijalnu metodu za određivanje fokalnih dubina. Odgovarajuće diagrame za obrađivanje dubokofokalnih potresa izradio je 1942., a objavio ih 1946. god. i sovjetski seizmolog E. F. Savarenskij.

Na temelju ovakovih sredstava danas se redovito određuju fokalne dubine novih, a naknadno su određeni fokusi dubokih potresa od 1905. god.

Najbolje prikaze geografske razdiobe dubokih fokusa izveli su B. Gutenberg i C. F. Richter 1938., a njihovu opću razdiobu dala je Ethel F. Bellamy 1939. god.

Potresi do najviše 100 km fokalne dubine katkada se javljaju u obadva seizmička pojasa Zemljine površine. No već su potresi do 200 km dubine vezani samo na istočni Mediteran, Hindu-Kuš i južni Atlantik. Potresi pak s još većim dubinama do blizu 800 km ustanovljeni su *samo u cirkumpacifičkom pojasu,* ali bez Sjeverne Amerike te antarktičkih predjela i jugoistočnog Pacifika. Dakle: Kamčatka i Kurilski otoci, pa Mandžurija i Japan te Istočna Indija s Polinezijom, zatim predjeli između Tonga i Kermadec otokâ sa zapadnim rubom Južne Amerike, to su područja najdubljih seizmičkih aktivnosti u unutarnjosti Zemlje.

H. H. Turner je upozorio, da bi se napadna koincidencija dubokih fokusa s obrubom Pacifičkog oceana dala razumjeti sa stanovišta Darwin-Pickeringove teorije o odvajanju Mjeseca s područja Pacifičkog oceana. Osim toga je B.

Gutenberg petom kongresu pacifičke znanosti 1934. god. bio predložio hipotezu, da pojasi dubokofokalnih potresa obilježuju granicu između »kontinentalne« i »pacifičke« strukture Zemljine kore. No ostaje onda neriješeno pitanje, zašto su iz ovog područja isključeni zapadna obala Sjeverne Amerike i jugoistočni Pacifik. Osim toga u japanskom i ponešto u istočno-indijskom području, a osobito u Južnoj Americi, pojas dubokih potresa pomaknut je prema kontinentu, a dubine fokusa kao da pravilno rastu i kao da leže na plohama, koje strmo padaju duboko pod kontinent. Nije međutim sigurno, da li čestina ovih potresa s dubinom pravilno opada, ili ona možda u nekoj određenoj dubini ima svoj maksimum.

Iza kako je bila utvrđena opstojnost dubokofokalnih potresa, prva zamisao bila je, da oni potječu od termodinamičkih procesa. Pater Stechschulte je mislio, da su oni eksplozivne naravi, izazvani fizikalno-kemijskim događajima, koji vode do rekristalizacije. U tom slučaju događaj bi se dao razumjeti na slijedeći način. Ako se amorfne tvari u unutarnjosti Zemlje polagano ohlađuju, onda se kod mirne unutarnjosti mogu pothladiti i ispod eutektičke točke kristalizacije. No ako kod ovakovog labilnog stanja nastupi bilo kakvo poremećenje, cijelo se pothlađeno područje u jednom času naglo kristalizira. Kako je pak kristalizacija većinom vezana i na promjenu obujma, to bi onda moralo doći do seizmičkih pojava. Međutim pravilna i trajna razdioba kompresionih i dilatacionih sektora unaokolo istih epicentralnih područja dubokofokalnih potresa, te često opažanje velikih transverzalnih valova S, isključuje mogućnost, da bi oni bili eksplozivnog ili ruševnog porijekla. Naprotiv ova okolnost upućuje na to, da su dubokofokalni potresi uzrokovani istim tektonskim događajima kao i plitki potresi u Zemljinoj kori.

Preostaje samo pitanje, odakle nagomilavanje tolikih distorzionalnih napetosti i usmjerenog tlaka (stresses), koji su u stanju lomiti krutu materiju u tako velikim dubinama. Da se riješi ovo pitanje, raščišćava se problem viskoznosti i elasto-viskoznih svojstava, naročito pitanje otpora protiv plastičnog toka (strength), materije u tim dubinama. Da se potpuno razjasni problem dubokofokalnih potresa, ispituje se njihov odnošaj prema izostaziji i anomalijama sile teže, pa čak i prema dobnim silama luni-solarnog djelovanja.

ON DEEP-FOCUS EARTHQUAKES

Some time ago scientists thought, that the earhquakes originate only in districts of the lithosphere.

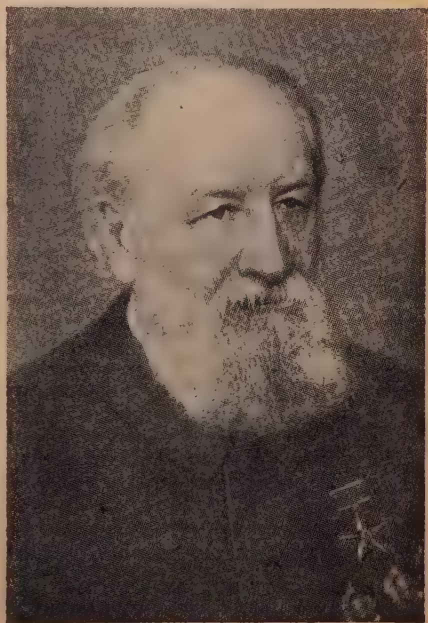
Andrija Mohorovičić investigating the earthquake which happened the 8th X. 1909 in the valley of river Kupa south of Zagreb, proved, that the earth has a not homogene, 60 km thick, crust. All earthquakes whose focus is within this layer, belong to the group of earthquakes of normal depth. The seismograms of each of these earthquakes have a maximum phase, which iz very clearly expressed. About this phase Mohorovičić thought that it was induced on the earthsurface by individual distorsional wave $\overline{S}$, which spreads only within so-called and above mentioned Mohorovičić's layer. For that reason Mohorovičić concluded that every earthquake whose focus would lay under this layer, would not have a maximum phase, therefore Mohorovičić supposed, that in the lower layer there isn't any sismical activity. However, K. Zoeppritz, who had a lot of material, had proved that there are earthquakes without a maximum phase. But Zoeppritz gave to this appearance another explanation. Afterwards investigating the times of appearance of the direct compressional wave P near epicenter and the same wave PKP, which goes through the earthcore, H. H. Turner 1922 gave an attention to the possibility of the sismical activities in the greater depths. At last a Japanese seismologist Kiyoo Wadati 1929 proved, that this kind of earthquakes does exist and their manner of appearance is the same as Andrija Mohorovičić it theoretically supposed 1910. The hodochrones (travel-time curves) of deep earthquakes differ characteristically from the hodochrones of shallow earthquakes. The methodes of determination of focal depth for deep-focus earthquakes were some years ago constructed. The earthquakes with focal depth to 200 km appear also in the east Mediterranean, but earthquakes with greater depth cca 800 appear only in the circumpacifical belt without North America. Now remains the problem how to explain from the physical point of view the origine of earthquakes in so great depths.

UGAO ZA SVAKOGA

ŽIVOT I RAD ALEKSEJA N. KRILOVA

Predavanje održano na kolokviju Matematičko-fizičke sekcije 3. XII. 1947.

Prošle godine u starosti od 83 godine umro je 26. X. 1946. Aleksej Nikolajević Krilov, akademik, učenjak, profesor, inženjer i brodograditelj, ukratko čovjek vanredne mnogostranosti. Krilov je spadao u broj onih tvoraca kulture, koji su znali u organsku vezu dovesti teoriju i praksu zasijecajući i u ekonomski život. Može se kazati da centralni položaj bez sumnje u njegovim istraživanjima zauzimaju radovi iz teorije broda, koji su mu pribavili svjetski glas.



Aleksej N. Krilov

Krilov je majstorski vladao matematičkim instrumentom. U svojoj izvanrednoj erudiciji u raznim područjima znanja, on je posjedovao »široko spremište«, u kome je uvijek mogao izabrati potrebni mu »instrument«. Krilov je znao kada je potrebno »naoštriti instrument«, t. j. razraditi nove matematičke metode.

Krilov je bio u pravom smislu riječi »teoretičar« — on je zgodno znao shematizirati proučavanu pojavu, prevesti je u oblik prikladan za matematičko rješavanje dovodeći dobivenu matematičku zadaću do numeričkih rezultata i tablica. No on je bio i neumoran eksperimentator, rukovodilac pokusnog bazena Pomorskog instituta, bio je načelnik istraživačkih ekspedicija na otvorenom moru. Najaktivnije učestvuje u svim pothvatima pri izgradnji vojno-pomorske, a također i građanske flote.

Eto o tome čovjeku, o tome učenjaku govorit ću u ovome članku. Govorit ću o starom veteranu ruske nauke, koji se uključuje u život stvoren oktobarskom revolucijom, čija se 30 godišnjica slavila ove godine; slavili su se napori i rezultati gigantskog zamaha u ostvarenju prve socijalističke države.

U matičnoj knjizi sela Lipovke Ardatovskog sreza Simbirske gubernije stoji zapisano »1863. 3. avgusta rođen je Aleksej sin Nikolaja Aleksandrovića Krilova i zakonite njegove žene Sofije Viktorovne.« — Otac mu je bio rodom iz Altirskog okruga (sada Uljanovska oblast), a mati iz Kazana. Otac mu je bio artiljerac; početkom šezdesetih godina otac je otišao u penziju i tokom 15 godina zajedno s porodicom živio je na selu. Osim Alekseja roditelji nisu imali druge djece. S njima su živjele i majčine sestre Jelisaveta i Aleksandra Viktorovna. Aleksandra je učila Alekseja čitati, pisati, molitvama, historiji svetaca i francuskom jeziku.

Daleko bi me odvelo, da iznesem mnoge crtice iz njegova rana djetinjstva. Stoga treba pročitati njegovu knjigu »Мои воспоминания«, koja daje mnogo podataka o njegovom djetinjstvu, školovanju,

radu i njegovu životu uopće. Možda samo da spomenem, da je kao malen bio vrlo živahan i da su ga nazivali »razbojnikom« i da su govorili za njega da je enfant terrible.

Slušajući jednom razgovor arhimandrita posumnjao je u njegovu nepogrešivost. U svakom slučaju, kako kaže Krilov, razgovor sa arhimandritom bio je prvim zrnom ateizma, koji je zatim kod njega bio konačno učvršćen, kada je kroz tri godine učio po poznatom katekizmu moskovskog mitropolita Filareta.

Kako je otac pobolijevao, savjetovao mu je jedan moskovski liječnik, da promijeni klimu i da pođe živjeti u Južnu Francusku. Stoga je on 1872. s majkom i Aleksejem otišao u Marselj. Tu su roditelji dali Alekseja u pension. On je tada imao 9 godina. Tu je neki Rua predavao aritmetiku i, kako kaže, dobro. Običavao je vršiti numerička izračunavanja, zahtijevajući da se vrše brzo i točno, a da se cifre pišu lijepo i razgovjetno.

U jesen 1874. vraća se otac u Rusiju i nastanjuje se ponajprije u Taganrogu, a sredinom avgusta prelazi u Sevastopolj. Za vrijeme ljeta Aleksandra Viktorovna je Alekseja pripremila za ispit na ruskom jeziku, jer nije znao ruskih termina i naziva, napose gramatičkih, i nije znao »Taras Buljbe« koga je trebalo znati skoro napamet i znati pričati svojim riječima bilo koju epizodu. Ispit je položio s vrlo dobrim uspjehom i bio je primljen u drugi razred gimnazije. U školi se doskora pokazao prvim. Dolazio je 20 minuta ranije u školu i prepričavao zadano drugovima, ali »ne po knjizi«. To su bili njegovi prvi pokušaji pedagoškog rada.

U januaru 1877. stupio je u »kvintu« klasične gimnazije u Rigi. Ali u aprilu iste godine počeo je turski rat. Podvizi pomorskih heroja bili su uzrokom, da su dječaci počeli maštati o pomorskoj službi. I Aleksej je rekao ocu: »Ti sam ljubiš more; ne ću da bubam nepotrebni latinski i grčki, daj me u pomorsku školu.« Otac je pristao i u jesen je Aleksej stupio u pripremni pension lajtnanta Perskoga, a u septembru 1878. bio je primljen, izdržavši ispit, u mlađi pripremni razred pomorske škole. U pomorskoj školi proboravio je šest godina, sve do 1884. — Poslije svršenog kursa i ispita iz teoretskih predmeta, te praktičnog ispita na plovidbi, bio je proizveden za mičmana flote.

Za vrijeme pohađanja pomorske škole i u slobodnom vremenu on se, kako kaže »može biti pod uticajem bliskog rođaka A. M. Ljapunova, koji je tada bio student matematičkog fakulteta Peterburškog univerziteta, zainteresirao matematikom izučavajući većinom po francuskim udžbenicima univerzitetskih kurseva, koji su daleko premašili program škole.« U tim mladim danima on je proučavao i skripta Čebiševa i uvodi se u krug njegovih ideja. Krilov je upravo pri gradnji brodova kasnije u praksi učinio široku primjenu Čebiševe metode numeričkih integracija.

Budući da je matematika bila osnovom specijalno pomorskih predmeta, to mu je u pomorskoj školi bilo lako učiti i on je cijelo vrijeme bio u svom odjeljenju prvi dobijajući najbolju ocjenu u svim predmetima.

U septembru 1883. prešao je u stariji specijalni razred. Među predmetima bila je »devijacija kompasa.« Na ispitu kod Zibina ispravio je pogrešno izloženu stvar što mu je Zibin priznao u prisutnosti mnogo kandidata, pa se poslije pričalo »Крылов на экзамене по девиации самого Зыбина срезал.«

Počinje se baviti teorijom. U devijaciji kompasa izveo je formulu za određivanje u apsolutnoj mjeri zakretnog momenta uzevši u obzir moment trenja i otpora vazduha.

Kada je zastavnik Krilov s 21 godinom svršio s odličnim uspjehom pomorsku školu, pridijeljen je kompasnom dijelu Glavne hidrografske uprave, kojom je rukovodio istaknuti naučenjak i poznati pomorac Kul-

long jedan od osnivača teorije devijacije kompasa (uslijed metalnih masa broda). On je, što se ticalo devijacije kompasa, bio pravi fanatik. Za njega se u šali govorilo »Kullong misli da se brodovi samo zato i grade, da bi se imali gdje postaviti kompasi i uklanjati njihovu devijaciju.«

Krilov radeći pod rukovodstvom Kullonga u kompasnoj radionici počinje da se dalje bavi tim problemima. Uvidio je, da se u zadaći, koju je postavio Kullong, a koju je Krilov trebao da obradi, u suštini sve nalazi kod Gaussa, pa je zadaća išla, tako reći, sama od sebe. Rezultat je bila radnja »Вычисление делении сил дефлектора компаса« štampana u »Записки по гидрографии« br. 1. To je bila njegova prva štampana radnja.

Devijacijom kompasa se i dalje bavi. Po uputama Kullonga izučava članke Smita i Evansa, izučava u originalu radove Gaussa iz teorije magnetizma, te radnju iz teorije potencijala »O silama, koje djeluju obrnuto proporcionalno kvadratu udaljenosti«, a isto tako Dirichletovu knjigu pod istim naslovom i na osnovu tih izvora sastavio je opću jednadžbu, kojom se rješava postavljeno pitanje. To je bila njegova druga štampana radnja. U vezi s tim rješava i treću zadaću. Njeno grafičko i analitičko rješenje izloženo je u njegovoj radnji »Основания теории девиации компаса«, koju je izdala Akademija nauka 1940.

Radeći s Kullongom zastavnik Krilov usvaja ne samo teoriju devijacije kompasa i praktiku za njeno uklanjanje, nego usvaja i praktiku obavljanja numeričkih izračunavanja. Kao račundžiju Krilova je privukao Kullong na rad u emeritraljnu kasu pri pomorskoj upravi (vrsta osiguravajuće organizacije). U vezi s tim Krilov proučava literaturu iz osiguranja i teoriju vjerojatnosti. Ovladavši u praksi emeritraljnom kasom donosilo mu je to kroz slijedećih 25 godina »не малый доход«. Iskustvo što ga je stekao u računu vjerojatnosti često je Krilov znao primijeniti u svojim tehničkim istraživanjima.

God. 1887. otišao je iz kompasne radionice. Počeo je raditi na Francusko-ruskoj fabrici pretku današnje fabrike — giganta, a zatim je odlučio produžiti studij.

Već elementarno upoznavanje s teorijom broda pokazalo je Krilovu, da ta nauka i brodogradnja uopće pretpostavlja široko polje rada za primjenu matematike. To je i bio razlog, da se odlučio da stupi u Pomorsku akademiju na odio brodogradnje. I u oktobru 1888. godine nalazimo ga među slušačima brodograditeljskog odjela.

U novembru 1890. završio je Krilov kao prvi brodograditeljski odio. Na osnovu mišljenja profesora Korkina ostavili su ga pri Akademiji stavivši mu u dužnost vođenje praktičnih vježbi iz matematike. Na Pomorskoj školi povjeravaju mu se povremeno predavanja.

S jeseni 1892. poslije novoga prijema slušača, a kako zbog bolesti, a zatim dužeg komandovanja A. A. Grehnev nije mogao predavati, bilo je Krilovu stavljeno u dužnost da osim vođenja spomenutih praktičnih vježbi čita i kurs teorije broda. I tako će njegovom specijalnom strukom postati brodogradnja ili bolje reći, kako sam kaže, primjena matematike na razne vrste pitanja iz pomorstva.

Pri čitanju kursa iz teorije broda i pri promatranju rada slušača doskora je primjetio, da je kod brodskih inženjera bila navika da izvode račune po veoma nezgodnim shemama s ogromnim brojem cifara (10 do 12), od kojih su za samu suštinu stvari mogle biti ispravne samo prve tri, a sve ostale su bile neispravne, a ujedno s tim za praksu nepotrebne. On kaže »ja sam doskora primjetio, da u svim uputstvima kako ruskim tako i inostranim, preporučeni postupci numeričkih izračunavanja mogu poslužiti kao obrazac, kako ta izračunavanja ne treba raditi.«

Kako u to vrijeme nije bilo ni jednog udžbenika, u kome bi bile sistematski i dovoljno potpuno izložene praktične metode izvođenja približnih izračunavanja, koja se susreću uopće u tehničkim pitanjima, počeo je on izlagati te metode i to ponajprije o približnim izračunavanjima uopće, a specijalno o primjeni na brod, ističući princip, da se račun treba da izvodi s onim stupnjem točnosti, koja je potrebna praktičaru, pri čemu svaka nepouzdana znamenka čini pogrešku, a svaka suvišna znamenka polovinu pogreške. Stoga možemo ovdje istaknuti osnovnu ulogu Krilova u razvoju kulture računske matematike u Rusiji. Toj stvari služio je Krilov kao naučenjak, kao pronalazač, kao pisac i kao predavač. Kao rezultat tog njegovog nastojanja oko približnog izračunavanja izlaze »Лекции о приближенных вычислениях« s kojima je počeo 1905., da bi taj kurs proširen i dopunjen izdao Institut inženjera 1911., a u drugom popunjenom i još više proširenom obliku izlazi 1933. u izdanju Akademije nauka. Kurs obuhvaća sve najvažnije zadaće ove vrste: izračunavanje korjena numeričkih jednadžbi, određenih integrala, korišćenje trigonometrijskih redova i približno rješavanje diferencijalnih jednadžbi.

Vrlo je raznolika literarna djelatnost Krilova. Osim velikog broja naučnih publikacija Krilov je dao cijeli niz solidnih kurseva i postupaka u raznim područjima nauke i tehnike. Samo njegovi udžbenici i naučni radovi iznose 4418 štampanih stranica. Stoga ću se samo dotaći, ne upuštajući se u neku detaljnu analizu, nekih od njegovih radova.

Kada je stradala jahta »Polarna zvijezda«, na kojoj je trebao ići car, bio je Krilov pozvan u hidrografski departement, gdje mu je bila postavljena zadaća, da razradi pitanje o bočnom kolebanju broda i da se utvrdi koliko se brod koleba kljunom i krmom. Krilov se ponajprije zainteresirao pitanjem izračunavanja bočnog kolebanja broda.

Pitanje o ljujanju broda na uzburkanome moru bilo je postavljeno vrlo davno. Prije 35 godina do Krilova bila je razrađena radovima Fruda teorija bočnog njihanja, kada su vrhovi valova paralelni sa smjerom gibanja broda uz pretpostavku, da je dužina broda u malenom odnosu prema dužini vala. — No pri izračunavanju naginjanja kljuna broda, koje nastaje pri valovima, koji idu u susret, nije bilo moguće načiniti pretpostavke, koje bi stvar uprošćavale. Tom teorijom se pozabavio Krilov i on razrađuje teoriju kolebanja na valovima primjenivši u istraživanju toga pitanja, tada još od nikoga nedirnutu metodu, koju su primjenjivali Lagrange i Laplace u »Nebeskoj mehanici« pri izučavanju gibanja planeta. I on već 1895. čita kurs »kolebanja«. Završivši taj rad Krilov je istakao, da je to pitanje novo i teško i da bi on htio o njemu referirati u Engleskom društvu inženjera brodograditelja. I tako je 1896. godine Krilov, tada još mlad naučenjak, publicirao o tome u početku u vidu kratke napomene u referatima Pariške akademije, a zatim odlazi u Englesku, gdje je probavio nekoliko dana i posjetio brodogradilišta. Rezultate svojih istraživanja izložio je na zboru društva brodograditeljskih inženjera u jesen 1896. u Londonu i ona su bila objavljena u djelima toga društva (»Transaction of the Institution of Naval Architects«) u obliku velikog memoara »Nova teorija kolebanja broda na valovima i napetosti koje nastaju tim gibanjem«. Zatim je taj rad štampan i na francuskom u »Bulletin de l'association tehnique maritime«. Za svoj rad dobio je Krilov od engleskog društva zlatnu medalju. To je bilo tim prijatnije, kako kaže, što je ruski čovjek bio prvi iz inostranstva, koji je polučio zlatnu medalju najpoznatijeg svjetskog društva inženjera brodograditelja.

Krilov je korjenito riješio postavljenu zadaću. Razmotrivši uticaj trohoidalnih valova, koji idu linijom gibanja broda, on je objasnio sve pojave ljuljanja i dao je mogućnost da se provede numerički račun. Promatranja na ruskom krstašu »Admiral Kornilov« i na francuskom »Annamite« potpuno su potvrdila teoretske račune Krilova.

Poslije toga rada Krilov je prešao na istraživanje općeg slučaja gibanja broda, kada njegov kurs čini neki zadani kut sa smjerom gibanja vala. O tome je izdao memoar pod naslovom »Общая теория колебания корабля на волнах«, a također na engleskom i francuskom jeziku.

God. 1898. Krilov daje metodu, kako se izračunavaju napetosti u tijelu lađe i u tom složenijem slučaju, u radu »О напряжениях испытиваемых кораблем на морском пути«, publiciranom također u izdanju Londonskog instituta za brodogradnju. Time je samo projektiranje brodova bilo postavljeno na čvršću osnovu.

Krilov se i kasnije vraća na teoriju broda. Tako on 1918. god. izdaje rad »О расчете вибраций корабля, производимых его машиной« (u Izvješćima Akad. nauka), u kome ocjenjuje uticaj resonancije, koja nastaje u blizini perioda stroja prema periodu slobodnih oscilacija u tijelu broda ili u njegovim dijelovima.

God. 1907. vršili su se na Crnom moru opsežni artiljeriski eksperimenti i Kirilovu je bilo povjereno u svojstvu predsjednika jedne od potkomisija, da istraži pitanje o uticaju kolebanja broda prilikom gađanja. Dok je ovo više u vezi sa samim kolebanjem, dotle jedan kasniji rad, koji se bavi direktno artiljeriskim pitanjem, nosi naslov »Sur l'integration numerique approchée des equations differentielles avec aplication au Calcul des Trajectoires des Projectiles« (Paris, 1927.), gdje autor na svojstven mu način jasno i potpuno daje podrobnu shemu numeričkog izračunavanja trajektorije taneta, dok opširni memoar »О вращательном движении продолговатого снаряда во время полета« izdaje 1923. u skraćenom obliku Akademija nauka. U tom memoaru Krilov ponajprije analizira teorije Majevskog i Zadubskog. Teoriju Zadubskog on smatra nesposobnom i ukazuje na pogreške, koje su se u njoj potkrale. Netočnosti ima i u teoriji Majevskog ali poslije učinjenih ispravaka od Krilova, može se ipak ta teorija primijeniti. Dobiveni su se rezultati slagali s eksperimentom, kako je to pokazalo pokusno gađanje na engleskom poligonu. Ovim radovima treba dodati i radove iz teorije smirivanja ljuljanja pomoću zvrka (Šlik i Fram). Krilov je razradio detaljnu teoriju toga pribora. Njegova su izvođenja i izračunavanja bila objavljena u »Pomorskom zborniku« i u »Bill. des Ass. t. m.« a bila su uvedena kao kurs na Pomorskoj akademiji.

U obliku pregleda napisana je zajedno s N. A. Krutkovim monografija »Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений« (izdanje Akad. nauka, 1934). Tu su tri dijela. Krutkovu pripada drugi dio — teorija zvrka u vektorskom izlaganju. Krilov je izložio analitičku teoriju s njenim najvažnijim tehničkim primjenama.

Kako je 1910. godine predstojalo treće unaprijed izračunato vraćanje Halejeve komete, a budući da je Newton dao postupak, da se odredi orbita komete iz triju njenih promatranja, to je Krilov odlučio da održi u Pomorskoj akademiji četiri predavanja o načinu određivanja orbite kometa i planeta iz malog broja promatranja oslanjajući se pri tome podrobno na Newtonovu metodu, poređujući s njom kasnije metodu Laplaceovu, potom Olbersovu, a na koncu Gauss-ovu. Ta predavanja u proširenom obliku bila su zatim izdana pod naslovom »О способах определения орбит комет и планет по малому числу наблюдений«. (1911.), a činila su prvi tom novo osnovanog časopisa »Izvješća Pomorske Akademije«.

Još nekoliko riječi o naučnom i predavačkom radu.

U septembru 1900. prof. Korkin je napustio čitanje lekcija u Pomorskoj akademiji i preporučio je na svoje mjesto Krilova. Na taj je način Krilov počeo čitati kurs diferencijalnog i integralnog računa na Pom. akademiji. Pored toga imao je dužnost upravitelja novoosnovanog »opitnog bazena«. Pri ispitivanju brodova bile su zamjećene veoma znatne vibracije brodova. U to vrijeme pitanje o vibracijama broda nije bilo razrađeno teoretski. Postojali su samo aparati za bilježenje vibra-

cija i to pitanje pretstavljalo je velike poteškoće za brodograditelje. Krilov je 1901. god. razradio teoriju te pojave i počeo je u Pomorskoj akademiji čitati kurs o vibracijama brodova. Taj kurs čita isto tako i u novo osnovanom Politehničkom institutu. Pri čitanju se pokazalo potrebnim razviti kao uvod cijeli niz čisto matematičkih partija, jer bi inače usvajanje kursa predstavljalo za slušače velike poteškoće. Kasnije je t. j. 1936. god. Lenjingradski brodograditišni institut predložio Krilovu da to učenje razradi kao pomoćni udžbenik za slušače instituta. To je on ispunio i spomenuti kurs je izdan pod naslovom »Вибрация судов« (ОНТИ).

U jesen god. 1908. predao je čitanje diferencijalnog i integralnog računa u Pomorskoj akademiji prof. S. E. Saviču zadržavši za sebe samo teoriju broda. Iste te godine postavljen je Krilov za glavnog inspektora gradnje brodova i za predsjednika Pomorskog tehničkog komiteta i kao takav proveo je veliko djelo pri rukovođenju projektiranja prvih ruskih linijskih brodova.

Kada je 1909. god. tečaj Pomorske akademije umjesto dvije godine bio proširen na tri godine, počeo je čitati lekcije o diferencijalnim jednadžbama matematičke fizike. Spomenute dužnosti i ovaj rad tražio je veliki napor od njega. Stoga u proljeće 1910. ostavlja službu u Pom. tehn. komitetu, a u jesen 1910. pristupio je čitanju lekcija iz teoretske mehanike u Institutu inženjera. Tada je napisao »Kinematiku«, »Dinamiku točke« i »Dinamiku sistema točaka«.

God. 1912. napustio je predavanja iz teoretske mehanike uzevši ponovo predavanja matematike na Pomorskoj akademiji. Za vrijeme ljeta 1912. spremio je novi kurs za treću godinu. Taj kurs pod naslovom »О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах« bio je štampan kao 5. dio »Izvješća Pom. akad.« (II. izdanje 1932., III. 1945.). U tom pomoćnom udžbeniku su osvjetljeni razni postupci integracije dif. jednadžbi, koje se praktično primjenjuju u osnovnim zadaćama. Naročitu pažnju zaslužuje VI. glava koja raspravlja o Fourierovim redovima. Tu je originalni postupak povećavanja brzine konvergencije spomenutih redova, koji dopušta da se znatno skrate izračunavanja pri određivanju numeričkih vrijednosti funkcije, koja je izražena redom.

Karakteristiku naučnog rada Krilova nužno je popuniti makar kratkim napomenama o drugoj strani njegova rada.

Kako smo mogli razabrati žrtvovao je mnogo vremena Pomorskoj akademiji rukovodeći matematičkim disciplinama. Krilov je bio rukovodilac i organizator niza naučnih i školskh zavoda i pri tome ulazi ne samo u detalje naučnog i školskog života, nego i u sva ekonomska pitanja. Sudjeluje kod osnivanja vojne pomorske škole, zbog čega je išao u Francusku da vidi njihove škole, a posjećuje i Berlinsku višu tehničku školu.

Bio je u stalnoj borbi za ostvarenje svojih ideja kod vojne brodogradnje a i odlučan u borbi protiv intriganata. Dolazi u sukob i sa ministrima. No u pogledu stručnih pitanja on je pobjeđivao. Kao polemičar spaja ubjedljivo logičnost matematičara sa svojim prirodnim humorom. Evo kako kaže za svoje sukobe s ministrom Vojevodskim, kojih je bilo po dva mjesečno: »Ja sam tada pojmio da A. N. Krilov može biti u odličnim odnosima s Vojevodskim, no general-major Krilov ne može biti predsjednik Pomorskog tehničkog komiteta, dok je ministar vice-admiral Vojevodski. Doskora se zbio slučaj, koji je prepunio čašu moga strpljenja« (1910.). Stoga on podnosi ostavku i tako se završila njegova služba u Pom. tehn. komitetu.

Sastav nekih Krilovljevih radova je u vezi s njegovim pedagoškim radom u višim školskim zavodima. Htio bih ovdje citirati neke pasuse iz njegovog popularnog članka »Значение математики для кораблестроения«, gdje podvlači razliku između teoretičara i praktičara.

Načinivši kratak pregled razvoja matematike obraća pažnju na to, da čisti matematičar treba od svoje nauke prije svega besprijekornu logičnost i strogost rasuđivanja. Učinit ću ovdje samo malenu digresiju navodeći njegove riječi o Euklidovim elementima, o kojima veli: »Još danas u Engleskoj u bukvalnom prijevodu muče 12—13 godišnje dječake, a možemo se samo diviti kako to dopušta društvo »Zaštita djece od surovog postupka i pokroviteljstvo nad životinjama«. Pokušajte, kaže dalje, uzeti Euklida u prijevodu i pogledajte kakvo umno naprezanje je potrebno da bismo slijedili tok njegova dokaza, ali zato kakova izvanredna logičnost i strogost i kakova dosljednost. Konačno to izučavanje predstavlja, može biti, i vanredno umno treniranje, ali u svakom treningu treba sačuvati dužnu mjeru«.

»Obično se drži, da matematika služi kao podloga obrazovanju inženjera i da svaki inženjer mora znati matematiku.

Matematika u svom savremenom stanju toliko je opširna i raznovrsna, da se može smjelo kazati, da je ona u potpunom opsegu nedostižna jednom čovječjem umu, pa prema tome mora biti učinjen strogi izbor onoga, što se iz matematike mora nužno znati i zašto nju mora ipak znati inženjer neke specijalne struke...

Jedno vrijeme koncem XVIII. stoljeća matematika kao da je djelomično skrenula s puta besprijekorne logičnosti i potpune strogosti. No već u prvoj četvrti XIX. vijeka vratili su je na taj put Gauss, Abel i Cauchy, a u posljednjoj četvrti XIX. v. poslije Weierstrassa počinje se u matematiku uvoditi, može se reći, »Euklidova strogost« a s njom i apstraktnost.

Međutim praktičar, tehničar, kakav i mora da bude svaki inženjer, gleda na stvar sasvim drugačije. On mora razvijati ne samo svoj um, no i svoja ćutila, tako da ga ne bi obmanjivala: on treba da zna ne samo gledati, nego i »vidjeti«, on treba da zna ne samo slušati, nego i »čuti« itd. Svoje zaključke on treba da svodi ne ropskome Descartesovom »mislim — dakle jesam«, nego čvrstome praktičnome »ja to vidim, čujem, pipam, ... dakle znači tako i jeste«.

Za čistoga matematičara je matematika sama sebi cilj, za inženjera ona je sredstvo, ona je instrument isto onako, kao što je poluga, dlijeto, turpija za klesara, sjekira i pila za drvodjelju.

Inženjer mora već prema svojoj specijalnoj struci, da vlada svojim instrumentom, no on ne mora da ga zna učiniti. Drvodjelja ne mora znati iskovati i kaliti sjekiru, no on treba da zna razlikovati dobru sjekiru od loše.

Tako se matematičara, koji stvara nove matematičke izvode, može uporediti s nekim fantastičnim univerzalnim tvorcem instrumenata, koji stvara skladište instrumenata za svaku potrebu; on čini sve počevši od malja da bi svršio najtočnijim mikroskopom i točnim kronometrom. Matematičar stvara metode za rješavanje pitanja, koja su nastala ne samo uslijed savremenih potreba, nego i za buduće, koje će nastati može biti sutra, može biti kroz hiljadu godina .

Zamislite sada inženjera, koji je unišao u to skladište i želi da nađe u njemu potrebni mu instrument. On će prije svega biti iznenađen ogromnom množinom cjelokupnog materijala nakupljenog kroz 2500 godina, a zatim će ga osupnuti čudna raznovrsnost. Pri pažljivijem promatranju on će zamijetiti pored mase drugih jednostavnih predmeta i nekoje složenije aparate, nepoznate mu namjene, no čudnih po ukrasu mnogobrojnih detalja, po brižljivoj njihovoj dotjeranosti, a neke čak optočene zlatom i srebrom.

Među instrumentima nove izrade on će vidjeti mnogo pribora, koji služi za najtočniju i najbrižljiviju ukrasnu izradu, opazit će i mnogo zastarjeloga, što je izašlo iz upotrebe, a mjestimično će naći i prosto raznu starudiju.

No inženjer nije došao u skladište, da bi uživao u nebrojenim skrovištima, nisu njemu potrebni ni zlato ni srebro, nego čvrsti čelik, grubo i pouzdano dlijeto.

Pogledavši iz bližega on će posred tolike bezbrojne raznolikosti ipak primijetiti red, odavno sistematski sređenog materijala, koji je ostao nepromijenjen... No skladištar će mu pokazati ono, što mu je potrebno, dok će za ostali materijal svraćati samo poznavaoci majstori i ljubitelji. On treba da se s povjerenjem odnosi prema onim već odavno od velikih majstora probranim vrstama, treba da se koristi tim gotovim i desetinama godina, ako ne stotinama godina ispitivanim instrumentima, treba da nauči s njima pravilno i spretno rukovati, a zatim kada sam postane poznavalac i majstor, da se progura i u ostala skrovišta i da nastoji izvući iz njih upravo ono, što mu treba. To sistematsko svrstavanje, to su kursevi, koji se čitaju, to su priručnici, koji se preporučuju, a skladištar i alatničar, to su profesori i rukovodioci, koji obučavaju. Može biti da oni sami i nisu inženjeri, no zato oni dobro znaju i dobro vladaju povjerenim instrumentima. Izučili su svoje skladište i znaju, gdje se i što se može naći.

Inženjer prema tome treba, da primjenjuje gotove i davno razrađene metode, drugim riječima, on treba da vlada izvjesnim dijelovima matematike.«

No o ograničenju materijala iz matematike za jednog praktičara kaže ovako: »Ipak odatle, što je paluba pokrivena drvenim podom, brodograditelj ne treba, da izučava botaniku, ili zbog toga, što je u kajuti divan obložen kožom, on ne treba da izučava zoologiju, tako i ovdje, ako se pri proučavanju kakvog specijalnog pitanja susretne kakva formula, to je kud i kamo bolje navesti je bez dokaza, a ne unositi u kurs cijeli dio matematike, da bi se dao potpuni izvod te jedine formule.«

Ali ipak dalje veli: »Pri izučavanju analize i mehanike i pomoćnih dijelova iz analitičke geometrije i više algebre, treba se pridržavati određene postepenosti i potpunosti. Mnogo toga može izgledati i izlišno i da nema direktne primjene, ali je ono nužno za jasno usvajanje daljega i ne može biti preskočeno kao dosadna glava kakvog romana.«

O strogosti i rigoroznosti matematike zauzima stav praktičara. »Za matematičara, koji treba da stvara nove metode u matematici, te metode moraju bazirati na potpunoj strogosti, dotle za inženjera, kome u glavnom trebaju te metode za rješavanje konkretnih pitanja u uskom nekom području, takva je strogost besciljna. Za inženjera takvi strogi dokazi, lišeni očiglednosti, stvaraju jade i on u njima vidi tapkanje na mjestu. Jer u tome vidi dokazivanje onoga što mu je poznato, što mu je prije dokaza izgledalo jasnije i pojmljivije nego poslije dokaza.«

Naročito zastupa i ističe računsku stranu. »Matematičar obično malo cijeni numeričke procese, naročito njihovo dovođenje do kraja t. j. do numeričkog rezultata.

Inženjer promatra stvar sasvim obrnuto: u numeričkom rješenju konkretno postavljenog pitanja on vidi i cijeni baš praktičnu stranu, gledajući kako treba postupiti u analognom slučaju, koji mu predstoji u praksi.«

O samom postupku matematičkog rješavanja nekog problema kaže ovako: »Kada se konkretno pitanje svodi na matematičko pitanje, to uvijek treba učiniti niz pretpostavki, jer matematika zajedno s mehanikom operira sa idealnim objektima, samo više ili manje bliskim realnim objektima, na koje će inženjer primijeniti postignute matematičke izvode. Jasno je, u koliko matematičko rješenje ne bi bilo točno, da ono ne može biti točnije od onih približnih pretpostavki, na kojima je osnovano. Na to često mnogi zaboravljaju ,čine u početku bilo kakvu grubu približnu pretpostavku, često i ne ugovorenu, a zatim daju postignutoj formi kud i kamo veće povjerenje, nego što ona zaslužuje i to toliko više, što je njen izvod kompliciraniji.«

Navodi jedan eklatantan primjer. Isporeduje praktičara Titova, lajznamenitijeg ruskog brodograditelja inženjera i poznatog talijanskog natematičara Levi Civitu. Na primjeru Titova pokazuje, da inženjer nora stalno skupljati praktična iskustva, on mora izgraditi svoju mjeru od oka i odmah vidjeti, da li je ispravan rezultat računa ili ne. Zatim za Levi Civitu kaže, kako je on izvanrednim izvođenjem s matematičke strane, utvrdio nekoliko općih kriterija, pomoću kojih se određuje maksimalna granica dinamičkog opterećenja jednog elastičnog sistema. U vezi s tim možemo spomenuti radnju Krilova: »О напряжениях, вызываемых в упругой системе динамической нагрузкой«, u kojoj se nalazi jasan i opći način rješavanja različitih zadaća ove vrste, a dani su i veoma interesantni primjeri. Ovdje je Krilov analizirao pogrešku, koju je počinio tako veliki naučenjak kao što je Levi-Civita, koji, nepravilno tumačeći svoju potpunu ispravnu formulu, po kojoj se određuje koeficijent napetosti mosta, dolazi do neispravnog zaključka. Izlazi da bi najlaganiji hod po mostu bio najopasniji. Krilov je pokazao kako treba upotrebiti formulu. I u svome članku »Značenje matematike. . .« završava ovako: »Kao »pravovjerni« matematičar (misli na Levi Civitu), on je vjerovao svojoj formuli više nego li oku i zdravome smislu i nije vidio u njoj očiglednu protivurječnost . . . Svaki bi inženjer — nastavlja Krilov — primjetio da zaključci po formuli ne odgovaraju stvarnosti, ali znameniti matematičar navikavši sa svojom »euklidovskom« strogošću mljeti aksiome i postulate, nije zamjetio pogreške u jednoj od svojih p r e t p o s t a v k i, pa je prema tome i dobio tako visoku gornju granicu.*

Svoje predavanje završio je Krilov riječima: »Titova su poznavali ne mnogi inženjeri brodograditelji toga vremena. Znamenitog Levi Civitu za njegove čisto matematičke radnje znaju i poštuju matematičari cijelog svijeta. I ako biste se vi spremali da budete matematičari, ja bih poželio, da i vi postanete Levi Civite, no vi se spremate da budete inženjeri brodogradnje, pa stoga želim da postanete Titovci.«

Da bismo završili razmatranje o naučnim radovima Krilova spomenut ćemo još dva članka. U prvom »Определение способов последовательных приближений к нахождению решения некоторых дифференциальных уравнений колебательного движения«, gdje se radi o integraciji jednadžbe oblika

$$y'' + ny + \alpha f + \beta F(y') = 0,$$

gdje su α i β maleni parametri. (Izvješća Akad. Nauka 1933).

U drugom »О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем« (Izvješća A. N. 1934.) istražuje rješenje t. zv. »vjekovne jednadžbe«, koja se u toj formi susreće u nebeskoj mehanici. Ne gledajući na to, što su se s tim pitanjem bavili takovi kolosi kao što su Lagrange, Laplace, Jacobi, a da nijednome od njih nije pošlo za rukom da postignu realnih uprošćenja Krilov je, koristeći se nekim mislima profesora Korkina, dao postupak, koji na kardinalan način uprošćava izračunavanja i u praktičnim pitanjima brzo dovodi do cilja.

Osobito je interesantan memoar Krilova »О расчете балок, лежащих на упругом основании.« (Ленинград 1930). Tim pitanjem zanimao se japanski naučenjak Hojasej, koji je dao svoj način rješenja. No metoda Hojaseja vodi do dosta dugih izraza. Krilov je dao svoju originalnu metodu rješenja zadaće, a na koncu radnje primjenjuje metodu na izračunavanja dna broda.

Krilov se bavio i zadaćama, koje su u vezi s elastičnim oscilacijama mehaničkih sistema. O tome mu je izišao članak »Über die erzwungenen

---

* Ovo »mljeti« je u vezi s onim što je rekao geolog Haksli »Matematika je slična žrvnju, melje ono, što se pod njega zaspe, i kao što zasuvši lobodu, ne ćemo dobiti pšenično brašno, tako ispisavši cijele stranice formulama, nećemo dobiti istine izloženih premisa!«

Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben« (Mathem. Annalen XVI. 1904./5.). Dalji mu je članak »Некоторые замечания о кнешерах и индикаторах« (Izvj. A. N. — 1909.). Metode nađene u tom članku imao je Krilov prilike da primijeni u interesantnom pitanju: God. 1914. pri ispitivanju kompresora topa za jedan linijski brod, koji je trebao stupiti u stroj, indikatori su zapisali čudan dijagram dajući za pritisak u cilindrima kompresora veličinu dva puta veću od očekivane. Izgledalo je, da se kompresori neće moći primiti, jer njihova izdržljivost nije bila računata za toliki teret. Time bi bila jako zadržana spremnost brodova i bio bi potreban znatan dopunski kredit od 2,5 milijuna rubalja za preuređenje. Krilov, kome je bilo povjereno da analizira stvar, opazio je, da su indikatori bili nepravilno primijenjeni uslijed čega su oni i zapisali ne onaj prtisak, koji je postojao u samoj stvari.

God. 1913. i prvih mjeseci 1914. produžio je s čitanjem lekcija na Pomorskoj Akademiji uz vršenje i nekih drugih dužnosti. U to vrijeme dolazi do prvog svjetskog rata. S početka rata Krilov nije dobijao unapređenja i ostajao je u činu general-lajtnanta flote, bio je profesor Pomorske akademije i bio je stavljen na raspoloženje ministarstvu pomorstva.

God. 1914. nije bilo prijema slušača u Pomorsku akademiju i nisu se čitale lekcije. Bio je slobodan i riješio se da upotrebi slobodno vrijeme na prevođenju na ruski jezik nekih djela. Ime Newtona kao osnivača mehanike i analize beskonačno maloga neprestano se susretalo u različitim djelima Pomorske akademije. No njegova djela napisana na latinskom jeziku, nisu bila pristupačna slušačima Akademije. Izučavanja Newtona pokazala su, da je Newton prosuđivao, dobijao i dokazivao svoja izvođenja upravo onako, kako je to rečeno u njegovoj knjizi »Principia mathematica philosophie naturalis«, a kako je ta knjiga po riječima Lagrangeovim »najveličanstveniji produkt čovječjeg uma« i kako je Krilov smatrao »da ih ne treba podvrgavati nikakovoj obradi«, preveo je on upravo to djelo. S osobitom brigom i ljubavi je Krilov ispunio tu zadaću i tako je slušačima bilo pristupačno najveće djelo ljudskog genija. Teža mjesta je Krilov objasnio u primjedbama (njih 207 na broj).

Kao direktor geofizičke opservatorije Krilov prevodi Gaussova predavanja iz astronomije (Izdano 1921.). Koncem 1934. preveo je i »Новая теория Луны« od Eulera. Krilov je sredio i izdao i predavanja Čebiševa iz teorije vjerojatnosti, što ih je hvatao Ljapunov.

U jesen 1915. bio je Krilov uvršten u sastav uprave Putilovskog zavoda, a 5. marta 1916. izabran je za redovitog člana Akademije nauka. Koncem januara 1917. po molbi je bio razriješen dužnosti direktora Glavne fizičke opservatorije, a produžio je raditi u Akademiji nauka i Pomorskoj akademiji.

Velika oktobarska socijalistička revolucija zatekla je Krilova kao postarijeg čovjeka, koji je zauzimao visoke položaje — on je bio general-lajtnant flote, akademik, zaslužni profesor Pomorske akademije, konzultant najvećih zavoda. Revolucija ga je zatekla na radu kao člana Ruskog društva parobrodarstva i trgovine, a kada je dekretom mlade vlasti radnika i seljaka trgovačka flota bila nacionalizirana, on je predao cijelu flotu sovjetskoj vlasti.

Krilov s njegovim upravo državničkim umom, jednim od prvih specijalista brodograditelja, stavlja svoje znanje i iskustvo inženjera, naučenjaka, organizatora i ekonomskog rukovodioca na raspoloženje mladoj Sovjetskoj republici. U godinama građanskog rata on reorganizira Vojno-pomorsku Akdemiju, onu Akademiju, u koju idu najbolji oficiri flote. Ona izdaje danas udžbenike i radove svojih pitomaca, od kojih su mnogi postali heroji Sovjetskog saveza, laureati Staljinskih nagrada, doktori agronomije, geodezije i tehničkih nauka.

U ljeti 1919. je postavljen na dužnost načelnika Pomorske Akademije. Na tom je poslu radio oko godinu i po dana, dok pod njegovim

rukovodstvom nisu bili dovršeni naučni planovi i programi iz svih predmeta tehničkih fakulteta Akademije.

Kada je bio prekinut obruč blokade, on ide inostranstvo, da ispuni niz odgovornih zadaća povjerenih mu od Sovjetske države. Početkom 1921. god. Akademija nauka je pokrenula pitanje pred Sovjetom narodnih komesara o odašiljanju komisije sa strane Akademije nauka za obnavljanje prekinutih naučnih veza sa inostranstvom, te za nabavku knjiga i časopisa za Akademiju, a dijelom i za Pomorsku Akademiju na pr. novih optičkih i fizikalnih aparata i dr.

I Sovjetska država zaista šalje grupu naučenjaka. U tom broju Akademika bio je Roždestvenski, Joffe i Krilov. Za taj boravak bilo je predviđeno 3 do 4 mjeseca najviše. No Krilovu se dogodilo, da je proboravio u inostranstvu sedam godina. Za to vrijeme radio je po najrazličitijim zadacima sovjetske vlade.

Ne samo da je Krilov učestvovao u kupovanju knjiga, časopisa i aparata za Akademiju, nego je bio postavljen za načelnika pomorskog odjela tzv. »željezničke misije«. Naime sovjetska je država trebala veliku količinu lokomotiva — oko hiljadu i po komada. Ta velika množina bila je kupljena u inostranim fabrikama, najprije u Njemačkoj jedan dio, a poslije (1922.) u Švedskoj. To je prva velika importna operacija mlade sovjetske zemlje. Ove silne lokomotive s tenderima trebalo je prevesti pomorskim putem. Krilov je načinivši proračun uvidio, da će biti mnogo jeftinije i rentabilnije za državnu kasu, ako se parobrodi ne zakupe samo za prevoz, nego ih se direktno kupi i poslije prevoza proda makar i s nekim popustom prema kupovnoj cijeni. Tu je Krilov sjajno proveo finansijsku stranu preduzeća iskorišćujući prigodnu konjukturu na međunarodnom tržištu. Obavivši nabavke i porudžbine u Njemačkoj, komisija je sredinom juna prešla u Englesku, gdje je kupila cijelu flotu brodova. Pored ove finansijske strane posla Krilov je sjajno ispunio još jednu složenu i u pomorskoj praksi do tada neobičnu zadaću. Radi se naime o načinu učvršćenja lokomotiva, da bi bilo moguće transportovanje pomoću brodova. Rješenje Krilovljevo izazvalo je veliki interes i međunarodne štampe. I opet se on pokazao spretan praktičar. Krilov ne samo da je prostudirao detalje operacije nego se spušta i lično u donji dio lađe da s maljem u ruci pokaže kako treba ojačati neobični teret.

Po povratku u domovinu Krilov izvodi veliko djelo stvaranjem snažne sovjetske vojno-pomorske flote, a također i građanske. I svuda s njim rade, kako kaže Ljusternik, »njegovi učenici, učenici njegovih učenika, i učenici učenika njegovih učenika«.

Od januara 1928. počeo je ponova čitati kurs teorije broda i diferencijalnog i integralnog računa slušačima brodograditeljskog odjela Vojno-pomorske Akademije, a u isto vrijeme vrši dužnost direktora fizičko-matematičkog instituta Akademije nauka. No godine su tražile svoje. Prestaje čitati lekcije iz teorije broda, a zadržao je samo čitanje lekcija iz matematike i mehanike. Možda da navedemo, kako je započeo predavanja iz matematike: »U oficirskim razredima Pomorskog korpusa prije je predavao matematiku Akademik M. N. Ostrogradski. On je govorio svojim slušačima: Matematiku za ocjenu 12 zna jedino gospod bog, ja nju znam za 10, a vi svi za 0. Ja se ne slažem s velikim naučenjakom — veli Krilov — svemogućem bogu nije potrebna matematika, a po Ostrogradskom ja nju znam za nulu. No ja se skoro 45 godina bavim različitim pitanjima tehnike pomorske grane, kojoj je potrebna primjenjena matematika. Za tih 45 godina dešavalo se, da sam neke dijelove matematike upotrebljavao svaki dan, druge samo mjesečno, treće samo godišnje, a na koncu bilo je i takvih, koji su mi bili potrebni samo jednom u 45 godina.«

Posljednje vrijeme Krilov je rukovodio radovima Svesaveznog inženjersko-tehničkog društva za brodogradnju, čijim je predsjednikom od juna 1932. god. Godine 1938., kada je navršio 75 godina Sovjetska vlada

ga je udostojila ordenom Lenjina — višom nagradom SSSR-a Za radove »Osnovi teorije devijacije kompasa«, »O teoriji zvrka« i »Poremećaji kompasa, koji nastaju od kolebanja broda na valovima« nagrađen je nagradom Staljina prvog stepena.

Do sada smo govorili samo u pregledu o originalnim radovima Krilova ostavljajući po strani još mnoge njegove manje važne radove o najrazličitijim pitanjima. No i te radnje nisu posve bez vrijednosti.

Spominjem još jednu granu djelovanja Krilova. On je pronalazač cijelog niza aparata, koji su većinom vezani s njegovom specijalnošću t. j. teorijom broda.

Ovolika raznolikost radova Krilova, naučenjaka i praktičara, pedagoga i organizatora dovodila ga je na životnom putu u dodir sa mnoštvom najrazličitijih ljudi. Pri tome je Krilov vladajući vanrednim promatračkim darom umio zapaziti kod tih ljudi novo i interesantno. Tako se formirala žarka, neuporediva u svojoj originalnosti ličnost Krilova bogata životnim iskustvom. U knjizi »Moje uspomene« s puno topline opisuje svoje učitelje, svoje saradnike i svoje učenike.

Krilov je imao manir da izlaže kao matematičar: kratko, jasno, dokazano. Referat poslan admiralu Makarovu o izlaganju osnova teorije o nepotopljivosti broda bio je pročitan za »4 minute i 38 sekundi«, a istodobno poslani telegram izlagao je osnovu te teorije na jednoj stranici.

Referati Krilova povodom nekih pitanja ekonomske važnost pretstavljaju historijski interes. U njima se osjeća originalan državnik-radnik. Takav je njegov referat u Gosudarstvenoj Dumi 1912. godine, kada kao stručnjak sudjeluje i ubjedljivo obrazlaže nužnost doznačivanja pola milijarde rubalja za stvaranje flote, da bi se zaštitio Petrograd i Baltičko primorje od opasnosti njemačkog napada. Radilo se o linijskim brodovima. Život je odgovorio na to pitanje. »Prošlo je, kaže on, 25 godina od toga vremena, kada su ti linijski brodovi stupili u stroj. Svi vršnjaci naših linijskih brodova davno su pretvoreni u lom, a naši gordo plivaju po vodama Baltika i Crnog Mora.«

I on je gord i ponosi se riječima, koje mu je uputio drug Vorošilov poslije uspjelih pothvata linijskog broda »Marata«: »Vaš „Marat" s čašću nosi socijalističku stražu u toku 18 godina«. Zadovoljan je, da je ispunjeno obećanje, koje je dao još 1908. godine.

Krilov je gomilao i na »službi« i u »dokolici« svoje mnogostruko naučno i praktično iskustvo, a to je iskustvo poslije opet znao primijeniti u pogodnom momentu. Ali godine su se nizale, pa se napunilo i osam decenija. Fizičke su sile dotrajale, no on je istrajan pa kaže: »Raditi kod pisaćeg stola još mogu, o čemu dokazuje ova knjiga« (misli na »Воспоминания«). I do posljednjeg daha života on nije prekidao posla.

Bio je čovjek široke erudicije, živog uma i pronicljivosti u naučnim pitanjima. Kakav je bio u 40. godinama, takav je bio i u 70. Prilikom jubileja, što ga je priredio Prezidijum Akademije, kazao je Čapljigin za Krilova, da stalno bodar njegov naučni horizont postaje stalno širi, uvijek svjež njegov naučni talent i tako sjajno njegovo oštroumlje. I starac od 83 godine doživio je svršetak pobjedonosnog domovinskog rata i bilo mu je suđeno, da svrši život u Lenjingradu — onom gradu u kome je i sam učio a i druge obučavao.

Milenko Sevdić,
profesor

Literatura:

1. А. Н. Крылов, Мои воспоминания. Izdanje Akademije nauka, 1945.

2. С. А. Чаплыгин, Научная деятельность Алексея Н. Крылова. Referat pročitan 23. XI. 1933. god. na sjednici Akademije Nauka.

3. Л. А. Люстерник, Памяти Алексея Н. Крылова. Успехи математических наук. Том I., выпуск 1 (11), 1946.

NEKI PODACI O SIHOTE-ALINSKOM METEORITU

*Napisao F. K. Šipulin**

Ujutro 12. 2. 1947. godine primijetili su na području Primorskog kraja u predjelima zapadnih obronaka hrpta Sihote-Alin pad krupnog meteorita praćen zvučnim i svjetlonosnim pojavama. Mjesto na kojem je meteorit pao nalazi se u tajgi na desnoj obali rijeke Bejcuha, desne pritoke rijeke Iman. Najbliža su naseljena mjesta: pčelinjak (sl. 1.) na rijeci Druga Haniheza, udaljen 6 km prema jugoistoku od mjesta pada i sela Harkovka, Krasnoarmejskog rajona i Vinogradovka, Požarskog rajona, od kojih se prvo nalazi 12 km u jugozapadnom pravcu, a drugo 20 km u sjeverozapadnom pravcu, od mjesta pada. Koordinate mjesta pada su 134° 39' istočne dužine od Greenwicha i 46° 9' 45" sjeverne širine.

Prvi su otkrili mjesto pada meteorita s aviona letači Dalekoistočne uprave P. J. Fircikov i A. Agejev, koji su 15. veljače slučajno letjeli nad tim područjem.

Autor je otišao u potragu za palim meteoritom iz Vladivostoka 19. veljače i nakon prikupljanja podataka u okolnim selima o karakteru pada meteorita prišao do mjesta pada 24. veljače. Tog istog dana, samo nekoliko sati ranije, stigli su tamo iz Habarovska geolozi DVGGU (Glavna Geološka uprava Dalekog istoka) V. N. Jarmoljuk, V. V. Onihimovskij i G. T. Tatarinov, koji su se dan ranije spustili avionom u okolini sela Harkovke. Iz podataka ispitivanja sabranih u selima Burlit Vel. Silan, Ivanovići i dr. (preslušano više od 25 ljudi) izgleda da se pad meteorita odigrao na slijedeći način.

Slika 1

12. veljače bilo je mirno i vedro mrazno jutro. Sunce tek što je izašlo i mjestimice je bilo još sakriveno za brdima. Oko 10 sati ujutro po mjesnome zonskom vremenu mnogi su stanovnici sela Krasnoarmejskog (središte selo Nova Pokrovka) i Požarskog rajona opazili let krupnog bolida, koji je letio od sjevero-sjevero-zapada prema jugo-jugoistoku azimutom oko 160° do 180°, pod smjernim kutom 40°—60° prema horizontu. Iz pčelinjaka, iz sela Harkovke i iz svih naseljenih mjesta zapadno od njih vidio se bolid u sjeveroistočnom i istočnom pravcu, kako leti naniže s lijeva na desno. Iz sela Ivanovići on se pričinjao kao da pada gotovo vertikalno s vrlo malim otklonom na zapad kako se približavao k Zemlji. Iz sela Nezamjetnij i iz drugih naseljenih mjesta, koja leže istočno od Ivanovića, vidio se bolid u zapadnom pravcu kako pada strmo naniže zdesna nalijevo.

Najudaljenija mjesta odakle se primijetilo let bolida bila su stanica Guberevo (V. B. Kuzmenkov), koja se nalazi 55 km od mjesta pada i Zvenigorodka (H. F. Iksanov) — 56 m daleko od mjesta pada.

---

* Ф. К. Шипулин, Некоторые данные о Сихотэ —Алинском метеорите, Природа, Москва, 1947, Но 7, 50—54.

Za sada se može samo približno ustanoviti izgled bolida u raznim dijelovima njegove staze naročito karakter trajektorije, koristeći sabrani materijal, budući da se materijal očevidaca o padu meteorita ne slaže potpuno, s obzirom na pojedinosti, iako svi očevidci daju više manje sličnu opću sliku.

Bolid je u početku u obliku svijetlećeg nevelikog tijela, koje se kretalo prema Zemlji. Vidljivi razmjeri bolida i njegov sjaj brzo su se pri tome povećavali. Na visini od oko 15—20 km od Zemlje bolid je za opažače iz sela Vinogradovka, Novopoltavka i Harkovka poprimio prividnu veličinu veću od Sunca i počeo davati zasljepljujući jarki sjaj, toliko intenzivan, da se je sunčano jutro iza pada meteorita pričinjalo sumračnim.

Radnici pčelinjaka S. V. Zagljada i V. V. Tajmanov, a također stanovnici sela Harkovke i nekih drugih bliskih sela uvjeravaju, da je sjaj bolida bio jače zasljepljujući od sunčevog.

Na onom komadu staze, na kojem je bolid počeo jarko svijetliti, počeli su od njega odletati mnogobrojne svijetle iskre. U tom trenutku bolid je podsjećao na vanredno blistavu raketu koja se raspada. Na visini od 10 km, koja odgovara očito točki zastoja, bolid se raspao na pojedine komade, koji su se u vidu nekoliko desetaka bijelih, no već slabo svijetlećih tijela upravili prema Zemlji lepezasto i gotovo okomito. Raspad je bio višekratan. Visina raspada bolida, prema određenim vertikalnim kutevima iz raznih naseljenih mjesta i po podacima raznih opažača iznosi oko 10—15 km s otklonom na manju stranu do 10 i na veću stranu do 28 km. Bolje od drugih vidio je pad V. V. Tajmanov, koji se u tom trenutku nalazio u pčelinjaku i on primjećuje, da je poslije raspada letjelo prema Zemlji mnogo sitnih bijelih »kuskov« (komada) od kojih je najkrupnijih bilo 6 do 7. »Kuski« su letjeli prilično zajedno, a od njih najveći nešto ispred drugih. Stanovnik sela Vinogradovka L. D. Gogolj izjavljuje, da se let meteoritnih dijelova nakon raspada odvijao po cik-cak liniji.

Vrijeme leta bolida od trenutka pojave u vidu svijetlećeg tijela pa do trenutka kad su komadi nastali njegovim raspadom pali na Zemlju, trajalo je od 5 do 10 sekundi.

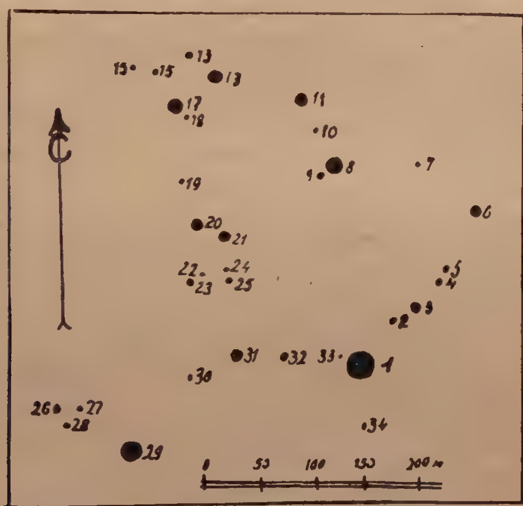
Pad meteorita na Zemlju u vidu udarca, koji je prethodio pojavama zvuka, primjećen je u polumjeru od 30 km (pčelinjak, selo Harkovka, selo Gončarovka). Neki su opažači primijetili u bolidu neveliki svijetleći zeleno-crveni i ljubičasti rep, kojemu su vidljivi razmjeri jedva premašili razmjere bolida.

Bolid je ostavio dobro vidljiv. trag, koji se opažao u svim selima Krasnoarmejskog i Požarskog rajona, a također i u tako dalekim mjestima kao stanica Iman (75 km od mjesta pada), stanica Bikin (80 km od mjesta pada) i čak u selu Ulunga, koje se nalazi 200 km sjeveroistočno od mjesta pada. Od trenutka pojave bolida na velikoj visini pa do točke zastoja, trag je bio ravan i srazmjerno uzak, sive boje a na krajevima ukrašen sunčevim zrakama ružičastog i narančastog tona. U točki zastoja, na mjestu višekratnog raspada bolida, obrazovao se gusti pokretni oblak olovno-tamne boje, koji se naglo povećavao obrubljen sunčevim zrakama u purpurno-crvenim i tamno-crvenim sjenčenjima. Oblak se sastojao iz nekoliko, 3 do 5 na broj, klubaka izduženih u obliku poredanih karika. Ispod tog gustog oblaka, t. j. još nakon točke zastoja pa do Zemlje trag je također bio opažen ali je bio nejasnije izražen i imao oblik stupca dima sivo »bijeloga«, koji se proširivao prema dolje.

Pri udarcu mase meteorita na Zemlju, uzdigao se na visinu 1,5 do 2 km ogromni, tamni, po svjedočanstvu Tajmanova »crn kao čađa«, stub prašine, koji se slio ujedno s tragom, koji je zaostao u zraku. Niže, bliže površini Zemlje do kuda još nisu doprle sunčeve zrake, uzdigli stub prašine bio je gotovo crn, a u vrhu u sunčevim zrakama imao je crvenu i narančastu boju. Sva niža polovina vidljivog traga bolida do gustog

oblaka, koji se obrazovao u točki zastoja, bio je uskoro iza pada raspršen zračnim strujama, a zatim kroz dva sata posve raspršen, gornji se dio traga opažao do večera u obliku crvenih oblačića i pjega, a kako saopćava kolhoznik iz sela Harkovke M. J. Hondoška, on je vidio visoko gore još u samo jutro 13. veljače pojedine crvene oblačiće. Silna tutnjava nalik grmljavini, koja je pratila pad meteorita, čula se u području od oko 100 km polumjera.

Prvi zvuk koji je dopro do naselja blizu mjesta pada meteorita, podsjećao je na višekratnu artiljerijsku salvu velikog broja topova, nakon čega su slijedili pojedinačni udarci, nalik na eksplozije granata ili pucanje iz pojedinačnih topova. Takvih reskih udaraca nije bilo manje od 20. U udaljenijim mjestima od mjesta pada, kao Bikin, Burlit, Iman, Zvenigorodka, Ivanovići, zvuk je bio manje oštar, kraćeg trajanja i potsjećao je na šum avionskog motora u blizini. Cjelokupno trajanje grmlja-



Slika 2

vine bilo je 4—5 minuta, a najprije su se čuli zvuci koji su nastali u blizini zemaljske površine, a zatim su počeli pristizati i zvuci iz visine otkuda je dolazio bolid. Moćni valovi zvuka izazvali su treperenje zemlje i svih predmeta, zveku prozorskih stakala a gdjegdje i razbili ih, udaranje vrata u kućama, osipanje štukature i ukrasa sa stropova i zidova, sukljanje dima i plamenih jezika iz gorućih peći, a djelomice i rušenje ciglenih peći.[1]

Ljudi su u većini slučajeva prestrašeni istrčali na ulice. Mnogi se ne sjećaju šta su radili u tom trenutku, jedni su bježali bilo kuda, drugi se posakrivali, neki izgubili iz ruku predmete i t. d. Dosta spokojno ponijeli su se lovci vični neočekivanostima. Tako je, na prmjer, lovac iz sela Vinogradovka P. M. Žuk u trenutku pada meteorita oprezno prilazio vepru, koji je ležao u šiblju. Neočekivani zvuk istjerao je zvijer i ona je iskočila na čistinu. Lovac je iskoristivši smetenost vepra točnim pogodkom oborio najprije zvijer a potom počeo motriti na nebo.

---

[1] Prozorska stakla izbita su u barakama šumskih gospodarstava u Šemjakin Ključu, u školi u selima Vel. Silan, u selu Burlit, u stanu Sazonova i u drugim mjestima. Peć se djelomično srušila u selu Burlit u stanu Stocenko.

Pad meteorita i pojave s njim u vezi izazvale su panični strah kod domaćih životinja. Konji i krave raskinuli su konope kojima su bili privezani, otrgli se iz ruku ljudi, razbježali se kroz ograde, rzali, mukali i t. d. Psi su se, zavijajući sakrivali u rupe, prevrtali se preko glave i bježali iz kuća u šumu.

Posjetom mjesta na kojem je pao meteorit skupio se niz podataka, koji su učinili da je Sihote-alinsk imeteorit postao jedan od najzanimljivijih meteorita poznatih u Sovj. Savezu. Mjesto pada meteorita nalazi se na vrhu i padinama strme gore, koja se proteže u meridionalnom smjeru, a pokrita je gustom cedrovom šumom s primjesom ariša. Na površini je porfir prekriven oko metar debelim slojem hladnih tamnožutih diluvialnih glina sa pjeskom, kojih se najviši dio javlja kao horizont tla.

Pri pregledu područja na vrhu i obroncima nađeno je više od 30 lijevkastih udubina, koje su se obrazovale na mjestu pada pojedinog dijela meteorita. Već prostim okom se vidjelo da su lijevci grupirani na površini od oko četvrtine kvadratnog kilometra, pri čemu najveći lijevak (Br. 1) zauzimlje krajnji jugoistočni položaj s obzirom na ostale. Taj je lijevak obrazovan, razumljivo, najkrupnijim glavnim tijelom meteorita, koje je imajući najveću inerciju otišlo k jugo-istoku, t. j. u pravcu leta bolida nadalje od svih ostalih, manjih, dijelova. Zadnji su obrazovali skup lijevaka ,koji su koncentrirani uglavnom na površini, smještenoj na sjevero zapad od lijevka br. 1. Lijevak br. 1 ima promjer oko 25 m i dubinu oko 6 m; lijevak br. 8 ima u promjeru oko 20 m i dubinu 6 m; lijevak br. 29 u promjeru oko 18 m i dubine 4,5 m; lijevci br. 11, 12 i 17 promjera 15—16 m i dubine 4—5 m; lijevci br. 3, 6, 13, 20 i 21 promjera 10 m, a dubine 2—4 m. Ostali lijevci imaju promjere manje od 10 m i srazmjerno tome manju dubinu. Najmanji iz broja izostavljenih imaju u promjeru 1—1,5 m i dubinu do 1 m. Kasnije, pri pažljivijim istraživanjima nesumnjivo će biti otkriveni novi još nepoznati lijevci.

Svi lijevci su prilično pravilna oblika i okruženi bedemom visokim do 1 m. Bedem je sastavljen iz otpadaka porfira u obliku uglastih (šiljastih) komada teških nekoliko kilograma iz glina, koje su sastavljale na mjestu lijevaka diluvijalni horizont i iz otpadaka stabala. Stijene lijevaka nagnute su prema središnjem dijelu pod kutovima od 30—50°. I dno i stijene lijevaka sastavljeni su od istih odlomaka porfira, kao i bedem koji ih okružuje. Na dnu lijevaka br. 1 i 7 nalaze se nevelike valovite površine. Šuma oko velikih lijevaka je silno oštećena, pri tome u daljini 30—40 m, postradala je samo kruna, a oko samih lijevaka razbijeni na male komadiće, polomljena i povaljena leže cijela stabla. Povaljena stabla prostiru se lepezasto s vrhom u smjeru od lijevka. Komadići i cijela stabla, po pravilu u značajnim količinama, leže na rubovima i u samim lijevcima. Oko lijevaka bio je otpuhan snijężni pokrov na malom rastojanju. Zračnim pritiskom snijeg je otpršen sa svih stabala u okrugu do jednog kilometra od lijevaka.

Stub prašine koji se uzdigao sa zemlje pri padu meteorita osuo se na snijeg i stabla u obliku sloja od 1—2 cm debljine. Skupa s prašinom uzdigla se u zrak silna masa kamenja, težine od nekoliko grama do nekoliko kilograma svaki, pa je kamenje pri padu na zemlju odlomilo veliku količinu grana i grančica sa stabala u okolini. Površina šume s najviše polomljenim granjem proteže se prema jugo-jugo-istoku od lijevka br. 1. U tom smjeru je kamenje odbačeno od lijevaka dalje od 500 m. Osim od palog kamenja, šuma je postradala u tom događaju djelomice od glavnog zračnog pritiska, što je razumljivo. Pregled šume i odlomljenih mnogobrojnih komada drva, a također savršeno svježeg komadića ivera, koji je priklijeśten među pojedinim izbočinama otpadaka meteorita, pokazuje, da je meteorit pao na zemlju hladan.

Odlomci meteorita bili su nađeni u lijevcima i njihovim dupljama među odlomcima porfira sasvim na površini. Nađeni primjerci meteorita sastoje se iz željeza, nikla i sulfida, a imaju izgled spljoštenih, oštrih

jako nepravilnih obično svinutih na jednu stranu, otpadaka sa značajnim oštrim i izlomljenim krajevima. Po težini, nađeni odlomci variraju od nekoliko grama do nekoliko kilograma. Već nakon našeg dolaska našli su mještani odlomak meteorita težak oko 70 kg, koji je ležao također na samoj površini. Na jednoj, obično raspukloj strani, otpatci imaju mnogobrojne vijugave zareze i brazde — uslijed mehaničke povrede. Površina otpadaka je crna, tamna bez sjaja, mjestimice obojena duginim bojama, obično modro. Na nekim prelomima otpadaka vidi se, da se oni sastoje iz poredanih zona sivoga i srebrnasto bijeloga metala, koji predstavljaju slitine željeza i niklja u raznim razmjerima. Sulfidi, u obliku sitnozrnastih brončanožutih lećastih nakupina rasutih u maloj količini posred željeza i niklja. Otpatci meteorita slabo su magnetični.

U cilju objašnjenja kvalitativnog sastava meteorita izvršena je analiza malog komada dosta jednorodnog metalnog ustrojstva u kemijskom laboratoriju Dalekoistočne baze Akad. Nauka (analitičar A. N. Dorohina). Nepotpuna kvalitativna analiza pokazala je da u ispitanom primjerku ima željeza, niklja, sumpora i fosfora.

Određivanje specif. težine dviju odlomaka dalo je vrijednosti 7,6 i 8,6. Izgled na površini malih otpadaka meteorita na mjestu pada ukazuje na to, da se je pri udarcu velikih odlomaka meteorita u Zemlju značajni dio njihove mase pretvorio u sitno razdrobljene sastojke. Ujedno je, nesumnjivo da se je neki dio mase palog meteorita zabio u Zemlju dublje od dna lijevka. Tome je dokaz, da, i ako ne svi, to u svakom slučaju, neki lijevci imaju u dubini meteoritno tijelo, jer, izgleda da bar u jednom od najmanjih lijevaka (br. 34), koji smo pokušali raskopati, ispod razine dna lijevka u aluviju slabo srušenog porfira, postoji kanal promjera oko 0,3 ispunjen rahlom masom sitnih odlomaka porfira, komada drva i gline. Kanal je bio razriven do 1,8 m debljine od površine, kod prvobitne dubine lijevka od 0,6 m. Nije se moglo doći do kraja kanala. Os raskopanog kanala usmjerena je u južnom pravcu pod kutom od oko 70°.

Očigledno je, da će se opsežnim ispitivanjem karaktera i mjesta pada Sihote-alinskog meteorita u najskorije vrijeme sabrati vrlo vrijedan materijal o tome izvanredno zanimljivom padu. Vjerojatno je, da se Sihote-alinski meteorit javlja kao najveći od svih meteorita koji su se ikada mogli ispitivati pri samom padu.

Preveo L. R.

Bibliografija

Dr. Mira Hercigonja

N. I. LOBAČEVSKI

Izdanje Hrv. prirodoslovnog društva. Zagreb 1947. Strana 64. Cijena Din 22.—. Za članove Hrv. prir. društva Din 18.—

Autor dr. Mira Hercigonja ovom uspjelom naučno-popularnom brošurom obogatila je ne samo našu literaturu o Lobačevskome, nego i našu općenito vrlo oskudnu matematičku literaturu. Brošura je podijeljenja u tri dijela. U prvom dijelu »Život Lobačevskoga« započinje se s biografskim podacima i to ponajprije pod naslovom »Starac«. Budući da se život i rad Lobačevskoga »može shvatiti samo, ako se upozna i istodobni život kazanjskog sveučilišta«, to pisac pod naslovom »Kazanjsko sveučilište« obuhvaća najmarkantnije momente iz kojih se može stvoriti jasna slika u kakvim je prilikama živio i borio se Lobačevski. Naročito je okarakteriziran reakcionarni rad Magnickoga kome je bilo kazanjsko sveučilište prepušteno na milost i nemilost. Poslije toga iz »Lobačevski na sveučilištu« i »Profesor matematike« saznajemo kako se L. školovao, razvijao. Izložen je u najkraćim potezima njegov put, kojim se uspinje do najviših časti na sveučilištu. U članku »Vidoviti« se govori o najznatnijem djelu Lobačevskoga, o stvaranju nove geometrije. Spomenuti su prvi

neuspjesi. Taj prvi dio brošure pisac završava riječima »Malo je otkrića u znanosti, koja su izazvala toliki napredak kao djelo Lobačevskoga. Svojim djelom Nikolaj Ivanović Lobačevski sasvim je izmijenio poglede na geometriju i bitno je proširio njezin sadržaj.«

Drugi dio nosi naslov »Djelo Lobačevskoga«. U prvom članku »Euklidovi elementi« dotaknuo se pisac pitanja postanka geometrije iz praktičnih potreba, a zatim prelazi na Euklidovo sistematsko djelo »Elementi«. U drugom članku »Problem petoga postulata« izložen je kratak pregled pokušaja, da se dokaže peti postulat (navedeno je 12 ekvivalentnih pretpostavki, skicirane su ideje Saccherijeve i Lambertove, pa zatim rad D'alemberta, Legendre-a, Gaussa i Janoša Bolyaia).

U trećem sažetom ali sadržajnom članku »Rješenje Lobačevskoga« pokazan je u najkraćim crtama put Lobačevskoga do rješenja problema, kao i njegov rad na izgradnji svoga sustava geometrije, koji je u sebi neprotivurječan, a naglašeni su i progresivni pogledi Lobačevskoga po pitanju eksperimentalnog istraživanja osnova geometrije. — U članku »Savremenici Lobačevskoga« se govori o Gaussu i Janošu Bolyai-u, a u vezi s tim dotaknuto je i pitanje prioriteta. U petom članku »Poslije Lobačevskoga« daje pisac kratak povjesni pregled daljega razvoja (Riemann, Beltrami, Poincare, Klein), a naročito se ističe rad prof. dr. V. Varićaka na tom polju i njegova primjena geometrije Lobačevskoga na specijalnu teoriju relativnosti.

Ovo bi bio popularni dio brošure.

Treći dio brošure nosi naslov »Napomene«, a kako sam pisac kaže »namijenjeno onima, koji su već zašli u matematički rad«. Tu već govori stručnjak — matematičar. U tom dijelu je citirana velika literatura, kao i popis radova Lobačevskoga.*

U trećem dijelu je osobito interesantan drugi članak »Geometrijske primjedbe« od str. 49. do 59. Tu su dani i stručni podaci o nekim pitanjima. Pokazano je barem nekoliko rezultata geometrije Lobačevskoga (ekvidistanta, granična kružnica), a zatim je govora o »Neprotuslovnosti geometrije Lobačevskoga« .

Na kraju se knjige nalazi komentar i bilješke pod brojevima od 1. do 57. Naročito bih istakao bilješku 21. i 42. u kojima se autorica dotiče Boškovićevih nazora o osnovnim pitanjima, napose o primjeni kružnice kod definicije kuta. Još je jedna opsežnija bilješka (br. 33.), u kojoj je spomenut dalji rad učenika prof. Varićaka na području neeuklidske geometrije.

Poznavajući činjenicu, da je teško pisati ovakvu naučno-popularnu knjižnicu, napominjem da je brošura i ako ne velika po opsegu (64 strance), no bogata po sadržaju, pisana živo i čita se s interesom. Brošura je vrlo ukusna po opremi, a uspjela po rasporedu i obradi materijala. Smatram da bi knjižica dobro poslužila za referat u naučnim đačkim grupama.

Milenko Sevdić

---

* Ovdje bih samo dodao još tri novija djela o Lobačevskome, koja su izašla u SSSR. To su: 1. »Nikola I. Lobačevski« (OGIZ, 1943) sa tri članka: a) P. S. Aleksandrov, N. I. Lobačevski, b) P. S. Aleksandrov, Što je neeuklidska geometrija?, c) A. N. Kolmogorov, Lobačevski i matematičko mišljenje 19. vijeka«. 2. Akademija nauka SSSR izdala je (1943) zbornik članaka naučnih radnika kazanjskog sveučilišta: a) članak »N. I. Lobačevski« od B. L. Laptjeva, b) članak »Kratak nacrt osnova geometrije Lobačevskoga« od P. A. Širokova, c) članak »Geometrija Lobačevskoga i njeno značenje u savremenoj nauci od N. G. Čebotarova. 3. E. Kolman »Veliki ruski mislilac N. I. Lobačevski« (Gosudarstvenoje izdateljstvo političeskoj literaturi 1944.)

ZADACI

Rješavajte zadatke i šaljite nam rješenja na adresu: Redakcija Glasnika, Marulićev trg 19, Zagreb.

Nije dovoljno da pošaljete samo rezultat u pojedinom zadatku; još nam je važniji opis postupka kojim ste zadatak riješili.

Šajite nam razne zadatke s pripadnim rješenjem!

Ako pošaljete samo zadatak a ne i pripadajuće rješenje, onda to smatramo da zadatak ne znate da riješite. Šaljite nam i takove zadatke!

PAŽNJA! Ne rješavajte više zadataka na jednom te istom komadu papira. Ako se u rješenjima služite i slikama, nacrtajte sličicu na posebnom komadu tvrđeg papira, i to po mogućnosti tušem!

Hitno šaljite rješenja zadataka označnih zvjezdicom jer ćemo ta rješenja objaviti već u drugom narednom broju GLASNIKA.*

77.* a) Tri dječaka A, B, C, stoje u redu. Njima je poznato, da njihov četvrti drug raspolaže s 3 bijele i 2 crne kape. Svakom od ove trojice stavlja on na glavu kapu, ali nijedan od njih ne zna, kakve je boje kapu dobio. Kako stoje u redu, dječak C može vidjeti kape drugova B i A, B kapu druga A, dok A ne može vidjeti nijedne kape. Na pitanje, kakve je boje njegova kapa, odgovori C: »Ne znam«. Iza toga, na jednako pitanje, odgovori B: »Ja također ne znam«. Napokon upitan dječak A odgovori: »Ja znam«. — Kakvim je prosuđivanjem mogao A pogoditi boju svoje kape?

b) Ako ispitivanja slijede obrnutim redom ($A \to B \to C$) i ako odgovor dječaka A glasi: ja ne znam, odgovor dječaka B: ja također ne znam, a odgovor dječaka C: ja znam, onda iza toga svaki od dječaka A i B može reći drugu C: sad i ja znam. Kakav je slijed kapa u ovom slučaju?

78.* Koliko pojedini pravilni poliedar ima a) dvojki bridova (ivica), b) trojki bridova, tako da se po dvije takove dvojke bridova odnosno trojke bridova ne mogu dovesti u međusobno poklapanje?

79.* $\sqrt[4]{i} = ?$

80.* U svakom određenom momentu imaju obje kazaljke na satu određeni položaj, ali bilo koji položaj obih kazaljki pri tom nije uvijek moguć. Neka se nađe kod kojih položaja zamjenom mjesta velike i male kazaljke nastaje i opet jedan mogući položaj obih kazaljki, i koliki je vremenski razmak između dva takva susjedna momenta, u kojima zamjenom mjesta obih kazaljki nastaje i opet jedan njihov mogući položaj.

81.* Koliko puta je grijanje prostorija pomoću električne struje skuplje nego grijanje rasvjetnim plinom, ako 1 m³ plina stoji 6 D i daje 5.000 kg-kalorija, a 1 kilovat (industrijske) električne energije stoji 2 D?

82. *Molimo, ako bi bilo moguće u slijedeći broj Glasnika uvrstiti jedan zadatak, koji smo bezuspješno rješavali, a inače nas postupak rješavanja veoma zanima.*

Zadatak glasi:

Tri kugle polumjera r, zadiru jedna u drugu do središta. Koliki je volumen i oplošje nastalog tijela?

Treppo-Skoko, uč. VII. raz.

---

* Zvjezdicom označene zadatke mogu riješiti i učenici srednjih škola, odnosno studenti prvog i drugog semestra.

83. Riješi u cijelim brojevima x, y, u, v jednakost

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2.$$

84. Ispitaj i grafički prikaži tok funkcije

$$(x^2 - a^2)\, y^2 = x^2\, (x^2 - 2a^2).$$

85. Na površini $az = xy$, jedna pokretna tačka polazi iz tačke A (a, o, o) sa brzinom (o, a, a). Znajući da se vrh njenog vektora akceleracije kreće po osi Oz, odrediti kretanje i polupréčnik krivine trajektorije.

86. S kojom se je česticom sudarila α-čestica, ako mjerenjem na slici dobivenoj pomoću Wilsonove komore ustanovimo, da je α-čestica nakon sraza otklonjena od prvobitnog svog smjera za kut $38^\circ\ 34'$, a smjer otklona nepoznate čestice prema prvobitnom smjeru α-čestice iznosi $50^\circ\ 53'$?

RJEŠENJA

Donosimo rješenja zadataka 3, 26, 35, 36, 37, 41, 45.

3. Dokaži

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 2^{2n}$$

(dostavio zajedno s rješenjem D. Blanuša, Zagreb.)

Uočimo najprije, da je

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k\, 1\cdot 3\; 5 \ldots (2k-1)}{2^k\; k!} =$$

$$= \frac{(-1)^k\, 1\cdot 2\cdot 3 \ldots (2k-1)\cdot 2k}{2^k\; 2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2k\cdot k!} = \frac{(-1)^k\, (2k)!}{2^{2k}\; k!\; k!} = \frac{(-1)^k}{4^k} \binom{2k}{k}.$$

Vrijedi dakle

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \binom{-\frac{1}{2}}{2} 4x + \binom{-\frac{1}{2}}{2} (4x)^2 - \ldots + (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{2} (4x)^k + \ldots$$

$$= 1 + \binom{2}{1} x + \binom{4}{2} x^2 + \ldots + \binom{2k}{k} x^k + \ldots$$

Kvadriramo li red potencija i sredimo po potencijama od x, to je koeficijenat od x^k jednak lijevoj strani relacije, koju hoćemo dokazati. U drugu ruku je kvadrat toga reda jednak

$$(1-4x)^{-1} = 1 + 4x + (4x)^2 + \ldots + 4^k x^k + \ldots,$$

tako da je koeficijenat od x^k jednak desnoj strani naše relacije. Dokaz je time proveden.

26. Riješi jednadžbu

$$(1 + x^2)^2 \cos^2 \alpha + 2x \operatorname{tg} \alpha = 1 + 3x^2$$

Zadatak je dostavio D. Blanuša, Zagreb; ispravno i na vrijeme riješili: D. Cvelić, Zagreb; N. Išpirović, Zgreb; V. Devide, Zagreb; M. Živković, Vršac; M. Loušin, Zagreb i Ivo Lah, Beograd.

Išpirović, Cvelić i Loušin iskorištavaju činjenicu da zadana jednadžba ima dvostruki korijen $\operatorname{tg} \alpha$ i dolaze do ekvivalentne jednadžbe

$$(x - \operatorname{tg} \alpha)^2\; (x^2 + 2 \operatorname{tg} \alpha\, x - 1),$$

iz koje razbiremo i druga dva korijena.

Ostali rastavljaju u gornjoj jednadžbi svedenoj na nulu lijevu stranu u produkt od 2 faktora i tako opet dolaze na kvadratne jednadžbe. U tu svrhu Devidé uvodi supstituciju $x = tg\,\alpha + y$. Lah stavlja $tg\,\alpha = a$, dok Živković dolazi na isto zgodno kombinirajući članove u jednadžbi.

Evo doslovno Devidéova rješenja.

Stavimo li

$$x = tg\,\alpha + y, \text{ dakle } tg\,\alpha = x - y, \; cos^2\,\alpha = \frac{1}{1 + x^2 + y^2 - 2\,xy}$$

i uvrstimo zadnje izraze u zadanu jednadžbu, dobit ćemo:

$$y^2\,(1 + 2\,xy - 3\,x^2) = 0.$$

Odavle izlazi

$$y_{1,2} = 0, \text{ dakle } x_{1,2} = tg\,\alpha \text{ i } 3\,x^2 - 2\,xy - 1 = 0$$

što daje $y_3 = \dfrac{3\,x^2 - 1}{2\,x}$ i zbog $x = tg\,\alpha + y$, $x^2 + 2\,x\,tg\,\alpha - 1 = 0.$

Odavle je

$$x_3 = -\,tg\,\alpha + sec\,\alpha, \quad x_4 = -\,tg\,\alpha - sec\,\alpha.$$

Lako se uvjeravamo (trigonometrijske formule za polukutove!) da se izrazi za x_3 i x_4 mogu pisati i ovako:

$$x_3 = -\,tg\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x_4 = ctg\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Ta dva dakle izraza zajedno s dvaput brojenim izrazom $tg\,\alpha$ daju sva četiri korijena zadane jednadžbe.

35. Kroz polovišta stranica nekog trokuta povučemo 3 paralele bilo kojeg smjera. Kroz svako polovište povučemo pravac, koji je simetrično postavljen spram dotične stranice s obzirom na paralelu kroz to polovište kao simetralu. Dokaži, da se ta tri pravca sijeku u jednoj točki. Kakvu krivulju opisuje ta točka, ako mijenjamo smjer paralelâ?

Dostavio D. Blanuša; pravilno i u pravo vrijeme riješili: D. Cvelić, Zagreb; Z. Bulatović, Beograd; Zd. Blašković, Vl. Jirasek, N. Išpirović i St. Bilinski, svi iz Zagreba.

a) Sintetički (Išpirović, Blaškovićeva, Bilinski).

Evo rješenja Bilinskoga.

Neka je u trokutu $A_1\,A_2\,A_3$ točka P_i polovište stranice a_i suprotne vrhu A_i (skiciraj). Kut trokuta kod vrha A_i neka je α_i. Pravac p_i neka je ona od triju paralela, koja prolazi polovištem P_i, dok pravac, koji je simetričan sa a_i s obzirom na paralelu p_i, neka je označen sa α'_i.

Neka su ponajprije paralele p_i paralelne simetrali kuta α_3. Tada je $a'_2 \,||\, a_1$ i $a'_1 \,||\, a_2$, pa se zato u tom slučaju pravci a'_1 i a'_2 sijeku u P_3 i to pod kutom α_3. Zakrenemo li iz tog položaja sve paralele p_i oko P_i za kut δ, to će se pravci a'_i zakrenuti oko P_i u istom smislu za kut $2\,\delta$. Ako je M sjecište pravaca a'_1 i a'_2 u tom novom položaju, to iz trokuta $P_1\,M\,P_2$ slijedi da mora biti

$$\sphericalangle P_1\,M\,P_2 = \Pi - (\alpha_1 - 2\,\delta) - (\alpha_2 + 2\,\delta) = \Pi - \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_3 = \sphericalangle P_1\,P_3\,P_2,$$

pa prema tome točke M i P_3 leže na istoj kružnici K, koja prolazi točkama P_1 i P_2. Dakle se pravci α_1 i α_2, koji pripadaju istom smjeru paralela p_1 i p_2, sijeku u točki M kružnice K, koja je određena točkama P_1, P_2 i P_3.

Na isti način slijedi, da se i pravci a'_2 i a'_3, koji pripadaju istom smjeru paralela p_2 i p_3, sijeku u istoj točki M kružnice K. Prema tome se doista sva tri pravca a'_i sijeku u jednoj točki M i to za bilo koji smjer paralela p_i a geometrijsko mjesto svih tih točaka M je kružnica K, t. zv. Feuerbachova kružnica trokuta $A_1 A_2 A_3$.[1]

b) Analitički (Cvelić, Bulatović i Jirasek).

Dajemo doslovce Bulatovićevo rješenje kao najjednostavnije (ne služi se determinantama). Ma da je njegov koordinatni sistem kosokutan, ipak cijelo izlaganje može čitati i učenik srednje škole.

Namjestimo koordinatni sistem tako da mu se početak poklapa sa jednim temenom trougla, a x osa sa jednom njegovom stranom. Koordinate drugih dvaju temena označimo respektivno sa $2a$, 0 i $2b$, $2c$. Tada su koordinate sredina strana: $S_1\,(a, o)$, $S_2\,(a + b, c)$, $S_3\,(b, c)$. Označimo dalje uglove pravca trouglovih strana rèdom sa a_1, a_2, α_3, njihove tangense respektivno sa m_1, m_2, m_3, ugao proizvoljnog pravca sa α, njegov tangens sa m, i najzad uglove simetričnih pravaca respektivno sa α', a'', a''', a njihove tangense sa m', m'', m'''. Tada se uslov simetrije prema pravcu a izražava obrascem

$$\alpha_k - \alpha = \alpha - \alpha^{(k)} \;(k = 1, 2, 3\,, \quad (k) = {}', {}'', {}''').$$

Odavde je $\alpha^{(k)} = 2\,\alpha - \alpha_k$, pa je prema tome

$$m^{(k)} = \frac{tg\,2\,\alpha - tg\,\alpha_k}{1 + tg\,2\,\alpha\, tg\,\alpha_k} \quad (1).$$

Međutim je:

$$tg\,\alpha_1 = 0,\;\; tg\,\alpha_2 = \frac{c}{b - a}\,,\;\; tg\,\alpha_3 = \frac{c}{b}\,,$$

te obzirom na ovo obrazac (1) daje:

$$m = \frac{2\,m}{1 - m^2}\,,\;\; m'' = \frac{m^2\,c - c + 2\,b\,m - 2\,a\,m}{a\,m^2 + b - a - b\,m^2 + 2\,cm}\,,\;\; m''' = \frac{c\,m^2 - c + 2\,b\,m}{b - b\,m^2 + 2\,cm}$$

Uvrstimo li ove vrijednosti u obrazac za jednačinu prave kroz jednu tačku, dobićemo jednačine simetričnih pravih:

I. Kroz S_1: $2mx - (1 - m^2)y - 2am = 0$.

II. Kroz S_2: $(cm^2 - c + 2bm - 2am)x - (am^2 - a + b - bm^2 + 2cm)y + 2a^2m - 2b^2m + 2c^2m + 2bc - 2bcm^2 = 0$.

III. Kroz S_3: $(cm^2 - c + 2bm)x - (2cm - bm^2 + b)y + 2c^2m - 2bcm^2 + 2bc - 2b^2m = 0$.

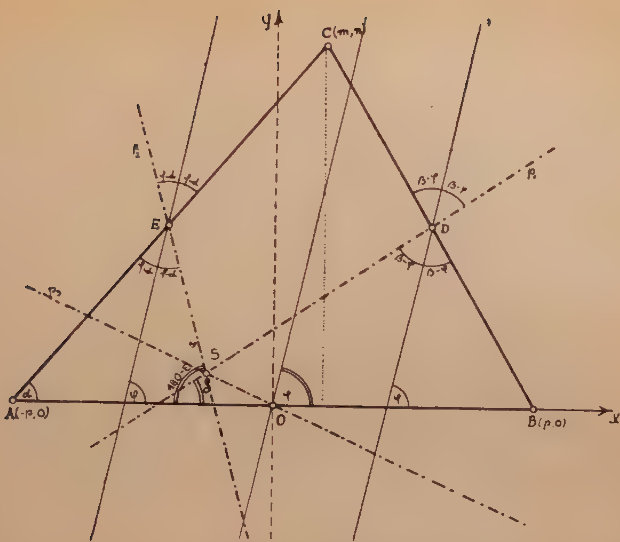
Pomnožimo li prvu jednačinu sa $-a$ i saberemo sa trećom dobićemo drugu, što znači da se sve tri prave sijeku u jednoj tački.

Da dobijemo jednačinu geometriskog mjesta svih tih tačaka treba iz bilo koje dvije jednačine eliminisati m. U tu svrhu napišimo I. i III. jednačinu u obliku:

$$(m^2 - 1)y = 2m\,(a - x)$$

$$(m^2 - 1)\,(cx + by - 2bc) = 2m\,(cy - bx - c^2 + b^2)$$

[1] O Feuerbachovoj kružnici zadana trokuta — »kružnica kroz 9 točaka« — vidi ovaj GLASNIK, 1 (1946), str. 90 t. 3.



Podelimo li drugu jednačinu prvom dobijamo:

$$(cx + by - 2bc)(a - x) = (cy - bx - c^2 + b^2) \cdot y$$

ili poslije svođenja:

$$cx^2 + cy^2 - c(a + 2b)x - (ab + c^2 - b^2)y + 2abc = 0,$$

ili najzad

$$x^2 + y^2 - (a + 2b)x - \frac{c^2 - b^2 + ab}{c}y + 2ab = 0.$$

Nije teško uvidjeti da dobijena jednačina pretstavlja krug koji prolazi kroz tačke S_1, S_3 i S_3.

Jirasek se služi koordinatnim sistemom prema priloženoj slici koju nam je poslao; Cveliću os Y nije simetrala jedne stranice nego pada u visinu što pripada dotičnoj stranici izabranoj da odredi os apscisa. U oba slučaja, malo je teže dokazati da se sva tri pravca p_1 p_2 *i* p_3 sijeku u jednoj te istoj tački.

36. Riješi jednadžbu $x^2 + 2y^2 = z^2$ u području cijelih brojeva, tako da x, y, z budu međusobno relativno prosti.

Zadao M. B. Kostić, Subotica; potpuno riješio N. Išpirović, Zagreb; djelomično D. Cvelić, Zagreb; suponirali opće rješenje i o njemu sproveli ispravnu diskusiju: M. Krajnović, Sisak i M. Živković, Vršac.

Kako su x, y, z rel. prosti, ne mogu oni biti svi parni; isto tako ne mogu niti dva među brojevima x, y, z biti parna. Kako oni sva tri ne mogu biti neparni, ostaje još jedina mogućnost, da je jedan jedini od tih brojeva paran. Kako to ne može biti ni x ni z, ostaje jedino da je y paran, dakle oblika $y = 2n$. Pišemo li zadanu jednačinu u obliku $(z + x)(z - x) = 2(2n)^2$, izlazi da je n produkt od dva cijela broja, dakle $n = ab$, t. j. $y = 2ab$ i $(z + x)(z - x) = 2(2ab)^2$.

Kako $z + x$ i $z - x$, ako su z i x rel. prosti i neparni, imaju najviše 2 kao zajednički faktor, možemo jedino staviti:

$$z + x = 4a^2, \quad z - x = 2b^2$$

dakle:

$$z = 2a^2 + b^2, \quad x = 2a^2 - b^2$$

ili obrnuto

$$z + x = 2a^2, \quad z - x = 4b^2,$$

ali ovo vodi do istoga rezultata.

Imamo dakle ova rješenja:

$$x = 2a^2 - b^2, \quad y = 2ab, \quad z = 2a^2 + b^2$$

jer je za svako a i b:

$$(2a^2 - b^2)^2 + 2\,(2ab)^2 = (2a^2 + b^2)^2.$$

Zbog zahtjeva da x, y, z budu relativno prosti, odmah vidimo da broj b mora biti neparan a k tome i relativno prost prema broju a.

Do tog rezultata služeći se trigonometrijskim funkcijama dolazi i N. Išpirović. D. Cvelić dolazi do djelomičnog rješenja $x = 2n^2 + 4n + 1$, $y = 2n\,(n + 1)$, $z = 6n^2 + 4n + 1$ nepotrebnom specijalizacijom na jednom mjestu dokaza, a Euklidovim algoritmom dokazuje da su ta rješenja međusobno prosti brojevi.

37. U što prelazi izraz

$$x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + xy \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + yz \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} + zx \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}$$

transformacijom varijabla $x = YZ$, $y = ZX$, $z = XY$?

Zadatak je dostavio Đ. Kurepa. Ispravno i na vrieme riješili: M. Nikolić, Metković; N. Išpirović, Zagreb; J. Blazina, Zagreb; V. Sedmak, Zagreb; F. Neděla, Zagreb i M. Živković, Vršac.

Neděla i Živković izražavaju parcijalne derivacije od V po novim varijablama X, Y, Z pomoću derivacije od V po starim varijablama, dok ostali rade obrnuto, što znatno odužava sam postupak, ali ipak dovodi do ispravnog rješenja.

Nedělino rješenje (posve je slično i Živkovićevo rješenje):

Pomoću transformacije $x = YZ$, $y = ZX$, $z = XZ$ prelazi zadani izraz najprije u

$$Y^2 Z^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + Z^2 X^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + X^2 Y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + X\,Y\,Z^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + Y\,Z\,X^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} +$$
$$+ Z\,X\,Y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}$$

Parcijalne derivacije prvog reda po velikim slovima glase

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial X} = Z \frac{\partial V}{\partial y} + Y \frac{\partial V}{\partial z}$$

a cikličnom zamjenom dobivamo

$$\frac{\partial V}{\partial Y} = X \frac{\partial V}{\partial z} + Z \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial Z} = Y \frac{\partial V}{\partial x} + X \frac{\partial V}{\partial y}$$

a drugoga reda

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} = Z \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \, \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial^2 V}{e y^2} \, \frac{\partial y}{\partial X} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial X} \right) +$$

$$+ Y \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial X} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial X} \right)$$

odnosno

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} = Z^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + Y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 2\, YZ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \quad \Big| \quad X^2$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = X^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + Z^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2\, ZX \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \quad \Big| \quad Y^2$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = Y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + X^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 2\, XY \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \quad \Big| \quad Z^2$$

Pomnožimo ili ove jednadžbe kako je naznačeno i zbrojimo ih i podijelimo sa 2, dobivamo

$$Y^2 Z^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + Z^2 X^2 \frac{\partial^2 V}{e y^2} + X^2 Y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + X Y Z^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + Y Z X^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} +$$

$$+ Z X Y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = \frac{1}{2} \left(X^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + Y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + Z^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right)$$

Gornjom transformacijom riješili smo se dakle u zadanom izrazu mješovitih parcijalnih derivacija drugog reda.

41. Neka se nađe polovično vrijeme za uran, ako 1 gram toga elementa emitira u sekundi $1{,}2 \cdot 10^4$ α — čestica

Dostavio D. Pejnović; riješio T. Moser, Osijek.

Zakon radioaktivnog raspadanja glasi

$$N = No\, e^{-\lambda t}$$

Nakon vremena T (polovično vrijeme) bit će broj atoma $N = \frac{No}{2}$.

$$\text{Dakle } \frac{1}{2} = e^{-\lambda T} \text{ ili } T = \frac{ln\, 2}{\lambda} = \frac{0{,}7}{\lambda};$$

λ je vjerojatnost da će se u 1 sekundi raspasti pojedini atom; taj broj dobijemo ako razdijelimo — $1{,}2 \cdot 10^4$ — broj atoma koji se raspadnu u 1 sekundi s brojem atoma u 1 gramu;

$$\lambda = \frac{238 \cdot 1{,}2 \cdot 10^4}{6 \cdot 10^{23}} = 47{,}6 \cdot 10^{-19}$$

$$T = \frac{0{,}7}{47{,}6 \cdot 10^{-19}} = \frac{700}{476} \cdot 10^{17} = 1{,}47 \cdot 10^{17} \text{ sek}$$

1 godina ima $3{,}15 \cdot 10^{17}$ sek., dakle

$$T = \frac{1{,}47 \cdot 10^{17}}{3{,}15 \cdot 10^{7}} \text{ godina} = 4{,}66 \cdot 10^9 \text{ godina.}$$

45. S kolikom početnom brzinom mora poći tijelo, koje se giba po kosini tako, da pređe neki put l u vremenu, koje je jednako trajanju njihaja za njihalo jednake dužine l? Uz kakve priklone kosine je početna brzina pozitivna, jednaka nuli, negativna?

Zadatak dostavio D. Pejnović; riješili D. Cvelić, Zagreb; učenik D. Skoko, Duga Resa i J. Moser, Osijek.

Tijelo se giba niz kosinu jednoliko ubrzano s akceleracijom $g \sin \alpha$, ako pretpostavimo da nema trenja, a s α označimo kut nagiba kosine. Budući da ono ima početnu brzinu c bit će prevaljeni put l dan formulom

$$l = ct + \frac{g \sin \alpha}{2} t^2.$$

Vrijeme t dobijemo iz formule za vrijeme njihaja njihala dužine l

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Dakle

$$l = 2\pi c \sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{1}{2} g \sin \alpha \, 4\pi^2 \frac{l}{g}$$

$$c = \frac{l - 2\pi^2 l \sin \alpha}{2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}} = \frac{\sqrt{lg}}{2\pi} (1 - 2\pi^2 \sin \alpha)$$

Da početna brzina bude

$$c \lesseqgtr 0 \quad \text{mora biti} \quad \sin \alpha \gtreqless \frac{1}{2\pi^2} \quad \text{tj.} \quad \alpha \gtreqless 2^0 54' 14''$$

Ako se trenje ne zanemaruje, onda, ako je k koeficijenat trenja, ono djeluje kao sila koja je proporcionalna normalnom pritisku na kosinu $kmg \cos \alpha$. Dakle akceleracija gibanja niz kosinu $g \sin \alpha - kg \cos \alpha = g (\sin \alpha - k \cos \alpha)$, pa istim postupkom izlazi

$$c = \sqrt{\frac{lg}{2\pi}} \left[1 - 2\pi^2 (\sin \alpha - k \cos \alpha)\right].$$

Sada će biti

$$c \lesseqgtr 0 \quad \text{ako je} \quad \sin \alpha - k \cos \alpha \gtreqless \frac{1}{2\pi^2}.$$

Ako se sa φ označi onaj kut nagiba kosine kod kojeg bi tijelo bez početne brzine klizilo niz kosinu jednoliko, onda slijedi da $tg \varphi = k$, pa naš uvjet nakon množenja s $\cos \varphi$ prelazi u

$$\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi \gtreqless \frac{1}{2\pi^2} \cos \varphi \quad t.\ j.$$

$$c \lesseqgtr 0 \quad \text{Za} \quad \sin (\alpha - \varphi) \gtreqless \frac{1}{2\pi^2} \cos \varphi$$

Konačno izlazi i treći broj Glasnika matematičko-fizičkog i astronomskog za godinu 1947. Preostala dva broja godišta 1947, kao i dva broja za godinu 1948, izaći će prije ljetnih školskih praznika.

Sve ćemo učiniti da od ove jeseni Glasnik bude izlazio bez zakašnjenja i da donosi aktuelne događaje iz naučnog svijeta i iz života Matematičko-fizičke sekcije i Astronomske sekcije. Rubrika Ugao za svakoga ima da donosi najrazličitije stvari iz matematike, astronomije i fizike, tako da svatko, koga zanimaju te tri nauke, nađe nešto i za sebe u Glasniku.

Sarađujte u Glasniku. Rješavajte i šaljite zadatke, pišite članke kako naučne tako i pedagoške, te nam šaljite i obavijesti o novim naučnim knjigama, časopisima i t. d. Glasnik mora da bude ogledalo današnjeg razvoja matematike, fizike i astronomije.

Godišnja pretplata na Glasnik iznosi 120 Din.

Priloženi ček na pretplatu odnosi se za godinu 1948.